где $L[u]$ — линейное дифференциальное выражение второго порядка с одной лишь функцией u.

И вот, если $a_y - b_x = 0$, то $L[u] = 0$, что доказывает первую часть теоремы.

Если же при $x = 0$, а, следовательно, и в некоторой окрестности оси y $a_y - b_x \neq 0$, то из уравнения (4) вытекает

$$v = \frac{L[u]}{a_y - b_x}; \tag{5}$$

следовательно, функция v определяется однозначно функцией u.

Теперь, если бы функция u удовлетворяла одному дифференциальному уравнению второго порядка, то u, а, следовательно, на основании (5) и v однозначно определялись бы начальными заданиями $u(0, y)$ и $u_x(0, y)$, что противоречит результату, полученному нами ранее [1]).

Наконец, для того, чтобы исследовать общий случай, предположим, что система (2) может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F(x, y, u, v, p, q), \\ v_y &= G(x, y, u, v, p, q), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где F и G — аналитические функции своих аргументов и, кроме того, $\frac{\partial G}{\partial p} \neq 0$. Сравнивая выражения для v_{xy}, получаемые из обоих уравнений, имеем:

$$G_p u_{xx} + (G_q - F_p) u_{xy} - F_q u_{yy} + G_u p - F_u q + G_x - F_y + \\ + G_v F - F_v G = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка будет таковым для одной только функции u, если выражения

$$\frac{F_q}{G_p}, \quad \frac{G_q - F_p}{G_p}, \quad \frac{G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G}{G_p} \tag{7}$$

не зависят от v.

Точно так же, как в линейном случае, можно показать, обратно, что дифференциальное уравнение второго порядка для u, эквивалентное системе (6), может существовать только лишь при выполнении условий (7).

§ 4. Параметрическое представление отображений, сохраняющих площадь [2])

Недоопределенное дифференциальное уравнение

$$u_x v_y - v_x u_y = 1 \tag{1}$$

---

[1]) Заметим, что доказанная выше теорема справедлива и в том случае, если A и B не являются линейными функциями от u, u_x, u_y. Если коэффициенты a и b также зависят еще от u, $u_x = p$, $u_y = q$, то вместо условия $a_y = b_x$ возможность приведения связана с существованием равенств

$$a_q = b_p = 0, \qquad a_p = b_q, \qquad a_y + a_u q = b_x + b_u p.$$

[2]) Ср. G. Scheffers, *Math. Zeitschr.*, т. 2, стр. 181.

представляет условие того, что отображение плоскости x, y на плоскость u, v, даваемое функциями

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y),$$

переводит всякую область плоскости x, y в область плоскости u, v той же площади.

В гл. I, § 1, п. 1, пример 5 было получено решение однородного уравнения

$$u_x v_y - v_x u_y = 0,$$

зависящее от произвольной функции; для неоднородного недоопределенного дифференциального уравнения (1) можно также дать решение, содержащее произвольную функцию и не содержащее знака интеграла.

Для этого целесообразно рассматривать x, y и u, v одновременно как функции двух параметров α и β и затем вместо уравнения (1) рассматривать дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \tag{2}$$

для функций $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$. Так как все системы решений x, y, u, v уравнения (2), переходящие друг в друга при преобразовании параметров α, β, приводят к одним и тем же системам решений $u(x, y)$, $v(x, y)$ уравнения (1), то без сокращения общности мы можем ограничиться отысканием лишь таких решений уравнения (2), которые удовлетворяют условиям

$$x + u = 2\alpha; \qquad y + v = 2\beta.$$

Такие решения могут быть представлены с помощью двух функций $P(\alpha, \beta)$ и $Q(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$x = \alpha + P, \qquad u = \alpha - P,$$

$$y = \beta + Q, \qquad v = \beta - Q.$$

Так как

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + P_\alpha + Q_\beta + P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha,$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 - P_\alpha - Q_\beta + P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha,$$

то уравнение (2) принимает вид

$$P_\alpha + Q_\beta = 0, \tag{3}$$

откуда для P и Q получаются выражения

$$P = \omega_\beta, \qquad Q = -\omega_\alpha$$

с помощью произвольной функции $\omega(\alpha, \beta)$. Следовательно, искомое решение дифференциального уравнения (1) получается в виде формул

$$x = \alpha + \omega_\beta, \qquad u = \alpha - \omega_\beta,$$
$$y = \beta - \omega_\alpha, \qquad v = \beta + \omega_\alpha,$$

не содержащих знака интеграла; при этом, конечно, предполагается, что определитель

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha}\omega_{\beta\beta} - \omega_{\alpha\beta}^2$$

нигде не исчезает.