в силу наличия возмущающего члена L_2, они будут удовлетворять каноническим «уравнениям возмущения»

$$\dot{\omega}_\nu = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_\nu}, \qquad \dot{\eta}_\nu = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_\nu}. \tag{35}$$

В некоторых случаях таким расщеплением задачи интеграции достигается значительное упрощение.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

§ 1. Новое рассмотрение характеристических многообразий

В этом параграфе мы дадим нашей теории задачи Коши несколько иное освещение, причем мы придем к выводу характеристического условия для характеристического многообразия, имеющему то преимущество, что его удобнее перенести на дифференциальные уравнения с частными производными высших порядков.

1. Предварительные формальные замечания по поводу дифференцирования в пространстве n измерений. В некоторой области независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ пусть дана функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, обладающая непрерывными производными, и точке P с координатами $x_1, \ldots, x_n$ пусть отнесены числа $a_1, \ldots, a_n$, рассматриваемые совместно как вектор a, для которого $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$. Через точку P можно провести прямую линию «параллельно вектору a» при помощи параметрических уравнений

$$\xi_1 = x_1 + a_1 s, \qquad \xi_2 = x_2 + a_2 s, \ldots, \qquad \xi_n = x_n + a_n s$$

с параметром s. Производной функции u по s или также производной функции u по «направлению», указанному вектором a, мы будем называть выражение

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}.$$

Следовательно, символ

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначает в каждой точке дифференцирование по направлению вектора a[1]).

Пусть в n-мерном пространстве задана поверхность B $n-1$ измерений уравнением $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и $u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, имеющая непрерывные производные на этой поверхности и в ее окрестности. Пусть, далее, P есть точка этой поверхности, в которой

$$\sum_i \varphi_{x_i}^2 \neq 0,$$

---

[1]) Если величины a_i являются непрерывно дифференцируемыми функциями точки: $a_i = a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то направления, определяемые этими величинами в каждой точке пространства, образуют поле направлений, линии

и $a \neq 0$ — произвольный вектор. Рассмотрим производную функцию u на поверхности B по направлению вектора a:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}. \tag{1}$$

Если при этом

$$a_i = \lambda \varphi_{x_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то мы будем эту производную (1) называть *«нормально направленной» производной*; если, сверх того, еще $\sum_i a_i^2 = 1$, а, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i \frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{\sum \varphi_{x_i}^2}} u_{x_i},$$

то будем говорить о *«нормальной» производной* функции u в точке P.

Если вектор a в точке P направлен по касательной к поверхности B, следовательно, перпендикулярен к нормали в точке P, т. е.

$$\sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0,$$

то выражение $\frac{\partial u}{\partial s} = \sum a_i u_{x_i}$ называется *«внутренней»* или *«тангенциальной» производной*; если же, напротив, $\sum_i a_i \varphi_{x_i} \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial s}$ называется *производной, «выводящей из поверхности B»*.

Так, например, выражение

$$\varphi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \varphi_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

для всякой пары индексов $i \neq k$ представляет собой тангенциальную производную; это выражение можно истолковать как производную по тому направлению, которое определяется сечением поверхности $\varphi = 0$ двухмерной плоскостью, проведенной через точку P параллельно осям x_i и x_k.

которого с помощью параметра s однозначно определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В таком случае $\frac{\partial}{\partial s}$ означает производную по этому параметру s. При этом s не есть обязательно длина дуги кривой; напротив, эта длина дуги σ связана с s равенством

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \sum_i a_i^2.$$

Производная определенной на кривой функции u по длине дуги выразится через ее производную по направлению вектора поля a в той же точке с помощью формулы

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum a_i^2}} \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Тангенциальные производные функции u зависят лишь от распределения значений этой функции на самой поверхности B, следовательно, известны, коль скоро известны значения функции u на поверхности B. В самом деле, введем в окрестности B вместо $x_1, \ldots, x_n$ новые независимые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ такого рода, чтобы $\xi_2, \ldots, \xi_n$ были $n-1$ независимый параметр на поверхности B, а $\xi_1 = \varphi$; в таком случае $u_{x_i} = u_\varphi \varphi_{x_i} + \ldots$, где многоточием заменены выражения, содержащие производные от u по одним лишь «внутренним» параметрам $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Следовательно, выражение

$$\sum_i a_i u_{x_i} = u_\varphi \sum_i a_i \varphi_{x_i} + \sum_{k \neq 1} u_{\xi_k} \sum_i a_i (\xi_k)_{x_i}$$

при условии $\sum a_i \varphi_{x_i} = 0$ будет известно, коль скоро даны значения $u(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ функции u на поверхности B.

Само собою разумеется, что через $n-1$ независимых тангенциальных производных функции u в точке P (например, $\varphi_{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_n} - \varphi_{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ в предположении $\varphi_{x_n} \neq 0$) и одну выводящую производную (например, u_φ) можно линейно выразить все производные от u в той же точке.

Следовательно, все производные u_{x_i} известны, если на поверхности B даны значения функции u и одной выводящей производной от u.

Если, в частности, $n = 2$ и $x_1 = x$, $x_2 = y$, то B является кривой в плоскости x, y, которую можно задать параметрически с помощью двух функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ параметра τ. Условие для тангенциального дифференцирования можно записать в виде $a_1 \frac{dy}{d\tau} - a_2 \frac{dx}{d\tau} = 0$ или, при выборе подходящего параметра t вместо τ,

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad a_2 = \frac{dy}{dt}.$$

2. Задача Коши и характеристические многообразия. Задачу Коши, рассмотренную в гл. II, § 7, мы формулируем теперь несколько видоизмененным образом, относя все высказывания к n-мерному пространству x-ов. Пусть в этом пространстве задано основное многообразие B $n-1$ измерений с помощью соотношения

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{3}$$

между тем как раньше (гл. II, § 7) мы представили начальное многообразие с помощью $n-1$ независимых параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Каждой точке этого многообразия пусть отнесено некоторое значение функции u, так называемая «нагрузка» многообразия B. Этим самым мы дополняем B до «нагруженного многообразия» C. Точно так же, присоединяя еще n функций (нагрузок) $p_1, \ldots, p_n$, удовлетворяющих на B условию полоски

$$du = \sum_i p_i \, dx_i \tag{4}$$

или в параметрической записи $\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}$, можно дополнить B до «*многообразия полосок*» C_1.

Не собираясь заняться вторично рассмотрением самого решения задачи Коши, мы поставим следующий вопрос. Пусть заданное начальное многообразие B снабжено нагрузкой u (соответственно — нагрузками u и p_i). Некоторая функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ с этими начальными значениями удовлетворяет в достаточно малой окрестности B дифференциальному уравнению $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$. Какие сведения сообщает это дифференциальное уравнение о значениях функции u и ее производных на многообразии B?

Рассмотрим сначала квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_i a_i u_{x_i} = a. \tag{5}$$

С помощью соотношений $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ в пространстве x_i, нагруженном значениями u, установлено определенное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial s} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, которое мы рассмотрим только на многообразии B. Это дифференцирование на многообразии B и его направление называются соответственно *характеристическим дифференцированием* и *характеристическим направлением*. Так вот, дифференциальное уравнение выражает простой факт

$$\frac{\partial u}{\partial s} = a; \tag{6}$$

так как правая часть на B известна, то это значит, что дифференциальное уравнение определяет однозначно значения *характеристической производкой* от u на многообразии B.

Существует следующая *альтернатива*: либо в рассматриваемой точке многообразия B

$$\gamma = \sum_i a_i \varphi_{x_i} \neq 0; \tag{7}$$

тогда характеристическое направление дифференцирования в этой точке выводит из многообразия B. Уравнение (6), т. е. в сущности дифференциальное уравнение (5), дает выводящую производную функции u, а, следовательно, заданием начальных значений u на B и дифференциальным уравнением определены *все* первые производные функции u в рассматриваемой точке многообразия B. Применяя этот результат к уравнениям, полученным из дифференциального уравнения (5) дифференцированием по x_k ($k = 1, \ldots, n$), убедимся, что в рассматриваемой точке многообразия B однозначно определены и высшие производные функции u,

Либо в рассматриваемой точке многообразия B выполняется соотношение

$$\gamma = \sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0, \tag{8}$$

которое мы будем называть *критерием характеристик или характеристическим условием*. В таком случае $\frac{\partial u}{\partial s}$ есть тангенциальная производная, известная уже благодаря заданию значений u на B. Следовательно, соотношение (6) налагает на заданные значения u на B дополнительное ограничивающее условие, которое должно быть выполнено, для того чтобы в окрестности B могло существовать решение, принимающее заданные начальные значения на B. Если оба соотношения (6) и (8) выполняются в каждой точке P многообразия B с нагрузкой u, то B называется *характеристическим основным многообразием* [1]).

Наша альтернатива напоминает аналогичную альтернативу у линейных систем алгебраических уравнений (ср. т. I, гл. I).

Либо дифференциальное уравнение однозначным образом определяет в точке P заданного основного многообразия B: $\varphi = 0$ соответствующие производные функции u при любых заданных на B значениях u; либо дифференциальное уравнение представляет собой условие, которому должны подчиняться заданные начальные значения u.

Аналогичные рассуждения можно провести для общего дифференциального уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{9}$$

Но на сей раз надо предварительно дифференцированием по независимым переменным получить систему новых дифференциальных уравнений, линейных относительно производных $\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$, а, следовательно, квазилинейных относительно величин p_i [2]):

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_u' p_i + F_{x_i} = 0. \tag{10}$$

Пусть опять дано допустимое начальное многообразие B: $\varphi = 0$ и на нем нагрузка $u(x_1, \ldots, x_n)$, $p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n)$, причем эти функции на B удовлетворяют уравнению $F = 0$ и условию полоски

$$du = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \, dx_\nu. \tag{4}$$

---

[1]) Нетрудно убедиться, что выражение γ и определитель Δ, рассмотренный в гл. II, § 7, отличаются лишь множителем, не равным нулю, откуда вытекает эквивалентность данного здесь критерия характеристического многообразия с критерием, данным ранее.

[2]) Такой процесс линеаризации будет играть важную роль не раз в дальнейшем изложении.

Вновь определяем в точках многообразия B характеристическое дифференцирование с помощью формулы

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum F_{p_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{11}$$

Соотношения (10) принимают теперь на B следующий вид[1])

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u. \tag{12}$$

Соотношения (12) дают в точках многообразия B следующую альтернативу: либо имеет место соотношение

$$\gamma = \sum \varphi_{x_i} F_{p_i} \neq 0;$$

в таком случае дифференцирование $\frac{\partial}{\partial s}$ выводит из B, и наши уравнения (12) дают производные величин p_i, выводящие из B, так как правые стороны известны из начальных данных и из дифференциального уравнения. Следовательно, все вторые производные от u однозначно определяются на B условиями задачи.

Либо на нагруженном многообразии B или в рассматриваемой его точке выполняется *«характеристическое условие»*

$$\sum \varphi_{x_i} F_{p_i} = 0; \tag{13}$$

в таком случае $\frac{\partial}{\partial s}$ есть внутреннее дифференцирование, и соотношение (12) содержит утверждение, что начальные данные сверх условия (4) должны еще удовлетворять дополнительным ограничивающим условиям:

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Если $\gamma = 0$ во всех точках многообразия B, причем выполнены как эти дополнительные характеристические условия (12), *так и критерий полоски* (4), *то B называется характеристическим основным многообразием для многообразия полосок, которое возникает путем нагрузки B функциями u и $p_1, \ldots, p_n$.*

Нетрудно убедиться, что это новое определение эквивалентно тому, которое дано в гл. II, § 7.

Заметим, что к характеристическому условию можно формально притти еще другими путями. Можно, например, исходить из того, что выражения

$$A_i = p_i \varphi_{x_n} - p_n \varphi_{x_i} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{14}$$

если всюду на B $\varphi_{x_n} \neq 0$, являются тангенциальными производными функции u, а потому известны одновременно с заданием значений u на B. Можно поэтому пытаться из этих выражений и уравнения

$$F(x_i, u, p_i) = 0$$

---

[1]) В силу равенства $\frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\nu} = \frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$. (*Прим. перев.*)

однозначно определить значения величин p_i на многообразии B. Условие того, что это невозможно, состоит в исчезании функционального определителя этих n уравнений относительно $p_1, \ldots, p_n$. Но этот определитель

$$\begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \ldots & F_{p_n} \\ \varphi_{x_n} & 0 & 0 \ldots & -\varphi_{x_1} \\ 0 & \varphi_{x_n} & 0 \ldots & -\varphi_{x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots \varphi_{x_n}, & -\varphi_{x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}\varphi_{x_i}\right)\varphi_{x_n}^{n-2}, \quad (15)$$

а, следовательно, мы вновь получаем условие характеристик (13), исходя из требования невозможности определения величин p_i.

В заключение еще одно замечание о природе критерия характеристик. В нелинейном случае это уравнение приобретает смысл лишь после того, как в него подставлены соответствующие значения вместо u и p_i, если, скажем, рассматриваются характеристические многообразия на заданной интегральной поверхности J: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. После подстановки в F_{p_i} выражений u и $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ в функции независимых переменных x_i, соотношением

$$\sum_i F_{p_i}\varphi_{x_i} = 0, \quad (13)$$

если оно выполнено для $\varphi = 0$, устанавливается, что определенное уравнением $\varphi = 0$ на поверхности J многообразие является характеристическим. Если же соотношение (13) выполняется не только в силу $\varphi = 0$, но тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$, то оно становится линейным однородным дифференциальным уравнением для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. В этом случае оно определяет однопараметрическое семейство характеристических многообразий $\varphi = c = \text{const}$, производящее интегральную поверхность J (ср. гл. I, § 5, стр. 37). Но и в том случае, когда требуется выполнение соотношения (13) лишь для одного единственного многообразия $\varphi = 0$, мы можем, тем не менее, записать его как дифференциальное уравнение в частных производных; для этой цели надо представить себе многообразие $\varphi = 0$ выраженным, скажем, в виде

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n = 0,$$

где теперь $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — независимые переменные. Если подставим в соотношение (13) вместо x_n функцию ψ и далее

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \psi_{x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x_{n-1}}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = -1,$$

то получим для ψ как функции только $n-1$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ дифференциальное уравнение с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i}\psi_{x_i} - F_{p_n} = 0. \tag{16}$$

Отметим еще, что характеристические кривые этих дифференциальных уравнений с частными производными (13), (16), (10) совпадают с характеристическими кривыми первоначального дифференциального уравнения.

§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новый подход к теории характеристик

Подход к теории характеристик[1]), несколько отличный от данного в гл. II, § 7, получается из рассмотрения нижеследующей системы квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} = b_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$, а также $b_1, \ldots, b_m$ являются функциями величин $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$, причем коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ тождественны во всех уравнениях. Такую систему дифференциальных уравнений мы называем *системой с одинаковой главной частью.*

Предварительно докажем следующую теорему (ср. гл. I, § 5, п. 2):

Система (1) *эквивалентна одному однородному линейному дифференциальному уравнению для одной функции от* $m+n$ *переменных.*

Пусть дана система решений $u_1, \ldots, u_m$ уравнений (1) в неявном виде:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = 0 \end{gathered}$$

или, общее, система решений, зависящая еще от m параметров $c_1, \ldots, c_m$, в следующем виде:

$$\left.\begin{gathered} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = c_m. \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

Для того, чтобы обеспечить возможность вычисления функций $u_1, \ldots, u_m$ из этих уравнений, предполагаем, что функциональный

---

[1]) Ср. также заметку H. Cooley в *Bull. Am. Math. Soc.*, Oct. 1937.