то получим для ψ как функции только $n-1$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ дифференциальное уравнение с частными производными

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i}\psi_{x_i} - F_{p_n} = 0. \tag{16}$$

Отметим еще, что характеристические кривые этих дифференциальных уравнений с частными производными (13), (16), (10) совпадают с характеристическими кривыми первоначального дифференциального уравнения.

§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новый подход к теории характеристик

Подход к теории характеристик[1]), несколько отличный от данного в гл. II, § 7, получается из рассмотрения нижеследующей системы квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} = b_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$, а также $b_1, \ldots, b_m$ являются функциями величин $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$, причем коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ тождественны во всех уравнениях. Такую систему дифференциальных уравнений мы называем *системой с одинаковой главной частью.*

Предварительно докажем следующую теорему (ср. гл. I, § 5, п. 2):

Система (1) *эквивалентна одному однородному линейному дифференциальному уравнению для одной функции от* $m+n$ *переменных.*

Пусть дана система решений $u_1, \ldots, u_m$ уравнений (1) в неявном виде:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = 0 \end{gathered}$$

или, общее, система решений, зависящая еще от m параметров $c_1, \ldots, c_m$, в следующем виде:

$$\left.\begin{gathered} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = c_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_m) = c_m. \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

Для того, чтобы обеспечить возможность вычисления функций $u_1, \ldots, u_m$ из этих уравнений, предполагаем, что функциональный

---

[1]) Ср. также заметку H. Cooley в *Bull. Am. Math. Soc.*, Oct. 1937.

определитель $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)}$ всюду отличен от нуля. Дифференцируя уравнения (2), получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0 \qquad \begin{matrix}(\mu = 1, \ldots, m) \\ (i = 1, \ldots, n),\end{matrix}$$

из которых, умножая на a_i и суммируя по i, выводим:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Отсюда в силу уравнений (1) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \tag{3}$$

Мы видим, что функции $\varphi = \varphi_\mu$ системы (2) удовлетворяют соотношению (3) тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m$; следовательно, они удовлетворяют этому же линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = 0 \tag{3a}$$

тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m$. Если ввести обозначения

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \qquad u_\lambda = x_{n+\lambda}, \qquad r = m + n,$$

то уравнение (3a) окончательно переходит в дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \tag{3b}$$

для функции $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$. Таким образом, первая часть нашей теоремы доказана.

Обратно, пусть даны m решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ дифференциального уравнения (3b), функциональный определитель которых

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)}$$

нигде не исчезает. Покажем, что величины $u_1, \ldots, u_m$, вычисленные из уравнений

$$\varphi_\mu(x_1, \ldots, x_n; \; u_1, \ldots, u_m) = c_\mu,$$

удовлетворяют системе (1). Прежде всего, дифференцированием получаем уравнения

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0,$$

из которых, умножая на a_i, суммируя по i от 1 до n и принимая затем во внимание уравнение (3), имеем:

$$-\sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{m} a_i \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = 0$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - b_\lambda \right) = 0.$$

Так как определитель величин $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda}$ нигде не исчезает, то отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - b_\lambda = 0,$$

т. е. что функции $u_1, \ldots, u_m$ действительно удовлетворяют системе (1).

Согласно гл. II, § 2 задача интегрирования линейного дифференциального уравнения (3b) эквивалентна интеграции характеристической системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Следовательно, из предыдущего вытекает *эквивалентность системы* (1) *дифференциальных уравнений в частных производных с одинаковой главной частью системе $m+n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно — системе*

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \quad \frac{du_\lambda}{ds} = b_\lambda \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ \lambda = 1, \ldots, m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Мы воспользуемся этими результатами для того, чтобы развить по-новому *теорию характеристик общего дифференциального уравнения первого порядка.* Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \tag{5}$$

и заменим его следующей системой, состоящей из $n+1$ квазилинейных дифференциальных уравнений для функций $u, p_1, \ldots, p_n$ с одинаковой главной частью:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial x_\nu} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \\ &\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} p_\lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Первые n уравнений этой системы получаются формально из уравнения (5) дифференцированием по x_i и последующей заменой

u_{x_i} через p_i и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\nu}$ через $\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$. Последнее уравнение обращается при этой подстановке в тривиальное тождество.

Теперь мы можем развить теорию дифференциального уравнения (5), исходя из квазилинейной системы дифференциальных уравнений (6) с одинаковой главной частью для $n+1$ неизвестных функций u, p_i. Прежде всего, из предшествующих рассуждений вытекает, что интеграция системы (6) эквивалентна интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_\nu p_\nu F_{p_\nu}, \tag{7}$$

т. е. системы характеристических дифференциальных уравнений для уравнения (5), выведенных в гл. II, § 7 другим путем. Далее, мы покажем, что надлежащим образом специализированная задача Коши для системы (6) эквивалентна задаче Коши для дифференциального уравнения (5), и тем самым получится новое обоснование решения задачи Коши с помощью характеристических дифференциальных уравнений, которое было проведено в гл. II, § 7.

Во-первых, само собою разумеется, что для всякого решения дифференциального уравнения (5) функции u и $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ дают решение системы (6). Рассмотрим теперь, обратно, такую систему решений u, p_i системы дифференциальных уравнений (7), которая удовлетворяет следующим начальным условиям. Пусть дано $(n-1)$-мерное, нигде не характеристическое начальное многообразие C в пространстве x, u. На многообразии C пусть заданы начальные значения величин p_i так, чтобы всюду на C было $F=0$ и, сверх того,

$$du - \sum_\nu p_\nu dx_\nu = 0. \tag{7a}$$

Далее, пусть решения системы дифференциальных уравнений (7), проходящие через каждую точку многообразия C и имеющие соответствующие начальные значения p_i, образуют содержащую C n-мерную поверхность S с уравнением $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. В таком случае эта функция u, вместе с соответствующими функциями p_i, является решением соответствующей задачи Коши для системы (6).

Мы покажем, что эта функция решает также задачу Коши для дифференциального уравнения $F=0$. Достаточно будет для этого доказать, что на всей поверхности S выполняются соотношения

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = R(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$p_i(x_1, \ldots, x_n) - u_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Для доказательства заметим, что для функции $P_i(x_1, \ldots, x_n)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i}. \tag{8}$$

Далее, имеем равенство

$$R_{x_i} = \sum_\nu F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i},$$

которое с помощью первого из дифференциальных уравнений (6) и соотношения (8) приводится к виду

$$R_{x_i} = \sum_\nu F_{p_\nu} \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}\right) - F_u P_i. \tag{9}$$

С другой стороны, последнее из дифференциальных уравнений (6) можно записать в виде

$$\sum F_{p_\nu} P_\nu = 0, \tag{10}$$

и из (9), умножая на F_{p_i} и суммируя по i, получим:

$$\sum_i R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

или, полагая для сокращения

$$F_{p_i} = a_i,$$

причем величины $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ надо считать известными, окончательно:

$$\sum_i a_i R_{x_i} = 0. \tag{10a}$$

Рассмотрим теперь на интегральной поверхности S производящие ее кривые, определяемые дифференциальными уравнениями (7); уравнение (10а) выражает тот факт, что на каждой из этих кривых

$$\frac{dR}{ds} = 0,$$

а так как R в начальной точке кривой, на C, исчезает, то

$$R \equiv 0 \tag{11}$$

на поверхности S. Из равенства (9) теперь следует

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} - \sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + P_i F_u = 0, \tag{12}$$

а из равенства (10), принимающего теперь вид

$$\sum_\nu a_\nu P_\nu = 0,$$

в результате дифференцирования по x_i получается соотношение

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + \sum_\nu b_\nu P_\nu = 0, \tag{13}$$

где $b_\nu = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_i}$ — опять-таки известные функции величин $x_1, \ldots, x_n$. Из соотношений (12) и (13) получаются уравнения вида

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} + \sum_\nu c_\nu P_\nu = 0,$$

причем и выражения c_ν являются известными функциями от $x_1, \ldots, x_n$. На каждой из характеристических кривых: $\frac{dx_\nu}{ds} = a_\nu$, эти последние уравнения переходят в следующие:

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_\nu c_\nu P_\nu = 0.$$

Это система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений для величин P_i. Из определения этих величин и начальных условий (7а) вытекает, что начальные значения величин P_i на C равны нулю, так как многообразие C не характеристическое и, следовательно, детерминант Δ, определенный на стр. 101, не исчезает. Следовательно, величины P_i тождественно равны нулю. Тем самым эквивалентность нашей задачи Коши для уравнения (5) и для системы (6) доказана.

Литература к главам I и II

Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.
Bieberbach L., Differentialgleichungen.
Goursat, Équations aux dérivées partielles du 1 ordre, Paris, 1921.
Caratheodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, 1935.
Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, Л. — М., 1934.