принцип. Если оказывается, что у корректной линейной задачи с дифференциальным уравнением соответствующая однородная задача имеет только «тривиальное решение» нуль, то можно ожидать существования решения общей неоднородной задачи, которое в этом случае является однозначно определенным. Если же однородная задача имеет нетривиальное решение, то существование решения неоднородной задачи связано с выполнением некоторых дополнительных условий.

В томе I этот «принцип альтернатив» нашел широкое подтверждение; добытые там сведения получат в следующих главах дальнейшее углубление.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

Нестационарные задачи и операторное исчисление Хивисайда

Нестационарные задачи, упомянутые в гл. III, § 7, играют в приложениях, особенно в электротехнике, в высшей степени важную роль; им поэтому посвящена обширная литература, почти сплошь подчеркивающая точку зрения приложений, причем в центре рассмотрения большей частью стоит знаменитый *операторный метод*, развитый Хивисайдом (Heaviside). Этот операторный метод, дающий целесообразный и прямой путь к решению вопросов, представляется тем более заманчивым, что строгое оправдание его символической процедуры часто отнюдь не очевидно. Такое удовлетворительное обоснование исчисления было дано лишь впоследствии с различных сторон. Однако, эти обоснования отнюдь не делают методов Хивисайда излишними, так как символический метод часто формально проще и позволяет более непосредственно сосредоточить внимание на желательном пункте.

Конечно, полное рассмотрение этой обширной области вышло бы далеко за пределы этого труда. Мы ограничимся здесь теорией лишь простейших типов нестационарных задач и поясним ее на примерах.

§ 1. Нестационарные задачи и решение с помощью интегральных выражений

1. Пример. Волновое уравнение. Предпошлем сначала простой пример нестационарной задачи, легко допускающей явное решение. Мы рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = f(t), \qquad u(l, t) = 0 \tag{α}$$

или соответственно

$$u(0, t) = f(t), \qquad u_x(l, t) = 0, \tag{β}$$

где $f(t)$ — заданная функция от t. Первая задача соответствует смещению u точек струны, находящейся в покое при $t=0$, закрепленной в конечной точке $x=l$ и подвернутой в начальной точке движению, заданному функцией $f(t)$. Вторая задача соответствует в начальной точке тому же движению, но конечная точка может свободно скользить по линии, перпендикулярной к положению покоя; вторая задача соответствует также электрическому процессу в идеальном двухпроводном кабеле (ср. стр. 174), причем $u(x, t)$ есть напряжение, и сила тока u_x в конечной точке обращается в нуль. В обеих задачах полагаем

$$f(t)=0 \quad \text{при } t\leqslant 0.$$

Эту задачу нетрудно решить в явном виде, исходя из общего решения волнового уравнения

$$u(x, t)=\varphi(t+x)+\psi(t-x) \tag{2}$$

и приспособляя функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ к начальным и краевым условиям. В целях большей ясности представим себе ось λ разделенной на отрезки J_ν: $\nu l\leqslant\lambda\leqslant(\nu+1)l$. Тогда функции φ и ψ можно определить последовательно в различных интервалах J_ν.

Рассмотрим вторую задачу, с отражением от конечной точки. Начальное условие для $t=0$ дает для искомых функций соотношения

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)+\psi(-x)&=0,\\ \varphi'(x)+\psi'(-x)&=0;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

из второго уравнения интегрированием получаем:

$$\varphi(x)-\psi(-x)=\text{const}. \tag{3a}$$

При этом x лежит в интервале J_0, а $-x$ в интервале J_{-1}. Из равенства (3) и (3а) вытекает, что функции φ и ψ постоянны в этих интервалах. Аддитивная постоянная в функциях $\varphi(x)$ и $\psi(-x)$ сама по себе произвольна, и в силу соотношения $\lim\limits_{x\to 0}[\varphi(x)+\psi(-x)]=0$ ее можно положить равной нулю. Краевое условие при $x=0$ дает

$$\varphi(t)+\psi(t)=f(t) \tag{4}$$

для всех интервалов J_ν. условие отражения в конечной точке дает

$$\lim_{x\to l}(\varphi'(t+x)-\psi'(t-x))=0; \tag{5}$$

после интегрирования же, предполагая функцию $\varphi(t+l)-\psi(t-l)$ всюду непрерывной и принимая во внимание (3а) и сделанный выбор произвольного постоянного, находим:

$$\varphi(t+l)-\psi(t-l)=0. \tag{6}$$

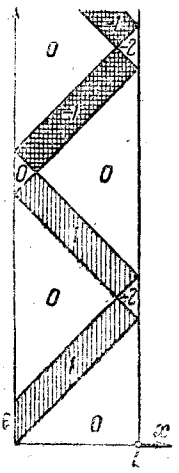
Отсюда получается формула приведения

$$\varphi(t+2l)=\psi(t), \tag{7}$$

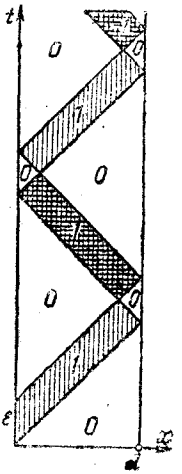
справедливая для всех значений t в интервалах $J_{-1}, J_0, \ldots$ С помощью этой формулы наши функции φ и ψ, а следовательно, и $u(x, t)$ определяются однозначно, последовательно интервал за интервалом, для всех значений $t > 0$. Как это нетрудно установить, решение может быть записано в следующем явном виде:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \{f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)\}. \quad (8)$$

Сумма в правой части лишь на первый взгляд кажется бесконечной, так как для каждого момента t лишь конечное число ее членов отлично от нуля. Наглядное истолкование этого ряда как серии волн с формой волны $f(\lambda)$ очевидно: решение представляет собой суперпозицию двух серий волн формы $f(\lambda)$ и $f(-\lambda)$ соответственно, распространяющихся в обе стороны вдоль бесконечной струны $-\infty < x < \infty$.



Черт. 7.



Черт. 8.

Отметим в нашем решении замечательное явление. Предположим, что начальная функция $f(t)$ соответствует импульсу [1]), носящему характер толчка (удара): пусть $f(\lambda) = 1$ в небольшом интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon$, вне же этого интервала $f(\lambda) = 0$. В таком случае в промежуток времени $l < t < l + \varepsilon$, например, в конечной точке $x = l$, функция u будет иметь значение 2 (ср. черт. 7). В электротехнических приложениях, где u представляет напряжение, это означает, что в процессах в двухпроводной линии, с бесконечным сопротивлением на конце, подведенные к системе извне напряжения могут в некоторых местах линии в известные промежутки возрасти вдвое.

Задача α) с закрепленной конечной точкой допускает столь же простое решение в явном виде:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \quad (9)$$

Также и здесь очевидно наглядное истолкование посредством наложения волн одинаковой формы. В отношении остального обращаем внимание читателя на помещенное здесь графическое изображение процесса. Рисунок соответствует толчкообразной начальной

---

[1]) Слово «импульс» мы будем в этой книге часто применять вообще для обозначения процессов, имеющих характер толчка, а также для обозначения соответствующих функций.

функции $f(t)$, имеющей лишь в интервале $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ значение 1, а вне этого интервала равной нулю. Полоса плоскости x, t, подлежащая рассмотрению, на нашей диаграмме разбита на области, в которых функция принимает соответственно значения $+1$, -1 и 0.

2. Общая постановка задачи. Собираясь теперь подойти к нестационарным задачам с более общей точки зрения, мы ограничимся случаем одной пространственной координаты x и временной координаты t с указанием, что случай общего числа пространственных измерений может быть рассмотрен совершенно аналогичным образом. Речь идет о следующей задаче.

Задача 1. Дано дифференциальное уравнение

$$au_{tt} + bu_t = L[u], \tag{10}$$

причем

$$L[u] = pu_{xx} + qu_x + ru,$$

где a, b, p, q, r — заданные непрерывные функции от одного x, определенные в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant l$$

и удовлетворяющие в этом интервале следующим предположениям:

α) $p \geqslant 0$,

β) $a > 0$ в гиперболическом случае,

$a \equiv 0$, $b > 0$ в параболическом случае.

Требуется определить решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (10) в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ для значений времени $t \geqslant 0$, удовлетворяющее в этой области

начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = \varphi(x), \\ &u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ (в гиперболическом случае)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и *краевым условиям*

$$\left.\begin{aligned} &u(0, t) = f(t), \\ &\rho u_x(l, t) + \lambda u_t(l, t) = \sigma u(l, t), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(t)$ — заданные функции, ρ, λ, σ — заданные постоянные.

Мы будем преимущественно заниматься важнейшим случаем, когда $\varphi = \psi = 0$, следовательно, при $t = 0$ господствует состояние покоя[1]). Предметом изучения в этом случае являются собственно процессы того типа, который в приложениях (например, в электротехнике) принято называть процессом выравнивания (Ausgleichsvorgänge)[2]).

---

[1]) Как показано в гл. III, § 7, общий случай можно всегда формально свести к этому случаю.

[2]) Отсюда и общее название «проблемы выравнивания» (Ausgleichsprobleme), которое автор распространяет на все задачи, рассматриваемые в настоящих дополнениях к гл. III. Мы предпочли лучше звучащее по-русски обозначение «нестационарные задачи». (*Прим. перев.*)

3. Интеграл Дюамеля (Duhamel). В том случае, если в момент $t=0$ имеется состояние покоя, т. е. $u(x, 0)=0$ либо соответственно $u(x, 0)=u_t(x, 0)=0$, общая задача I легко приводится к некоторой специальной задаче.

Определим сначала функцию $U_2(x, t)$, как однозначно определенное решение задачи I с непрерывно дифференцируемым краевым условием

$$f(t)=U_2(0, t)=\frac{t^2}{2} \text{ для } t\geqslant 0,$$
$$=0 \text{ для } t<0$$

и допустим, что функция

$$U_1(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}U_2(x, t)$$

представляет непрерывное решение для все еще непрерывного краевого условия

$$f(t)=U_1(0, t)=\begin{cases} t \text{ для } t\geqslant 0, \\ 0 \text{ для } t<0, \end{cases}$$

и, наконец, пусть функция

$$U(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}U_1(x, t)$$

есть решение задачи для прерывного краевого условия

$$f(t)=U(0, t)=\begin{cases} 1 \text{ для } t>0, \\ 0 \text{ для } t<0, \end{cases}$$

обладающее следующим свойством: всякая ограниченная область полосы $0\leqslant x\leqslant l$; $t\geqslant 0$ может быть разложена на конечное число замкнутых частичных областей, в которых функция U непрерывна вместе со своими производными до второго порядка.

При этих условиях справедлива следующая теорема Дюамеля: *Если $f(t)$ и производная $f'(t)$ кусочно непрерывны при $t>0$,* то функция

$$u(x, t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x, t-\tau)f(\tau)\,d\tau) \tag{13}$$

(*интеграл Дюамеля*) *является решением задачи* I *с краевым условием* $u(0, t)=f(t)$.

При этом, как мы увидим на примерах, решение $U(x, t)$ уже не будет всюду непрерывным. Действительно, мы должны ожидать существования разрывов непрерывности у функции $U(x, t)$, так как краевое условие $U(0, t)=1$ вместе с начальным условием $U(x, 0)=0$ означает, что в точке $x=0$ в момент времени $t=0$ последовал толчок, под влиянием которого значение $U(0, 0)=0$ в сколь угодно малый промежуток времени подскочило до значения 1.

Эта трактовка дает немедленно наглядное истолкование интегралу Дюамеля (13). Представим себе действие «приложенной силы» $f(t)$

на левом конце интервала состоящим из ряда отдельных толчков, произведенных в моменты времени $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots, \tau_n$, вызывающих каждый раз скачок значения $u(0, \tau_{\nu-1})$ на величину, пропорциональную $f(\tau_\nu) - f(\tau_{\nu-1})$. Если $U(x, t)$ есть определенное выше специальное решение, то решение $u(x, t)$ под влиянием этих толчков представляется аддитивно в следующем виде:

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} U(x, t-\tau_\nu)(f(\tau_{\nu+1}) - f(\tau_\nu)) + U(x, t) f(0) \quad (\tau_{n+1} = t).$$

Если предположим, что функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$, но что, однако, $f(0)$ может быть не равно нулю (что соответствует конечному скачку в момент $t = 0$), то при последующем выполнении предельного перехода к бесконечно малым промежуткам времени получится интеграл

$$u(x, t) = U(x, t) f(0) + \int_0^t U(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

в согласии с нашим утверждением (13).

Этот результат, полученный эвристическим рассуждением, нетрудно теперь доказать непосредственной поверкой. В силу начального условия $U(x, 0) = 0$ имеем:

$$u_t = U_t(x, t) f(0) + \int_0^t U_t(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau;$$

далее, в гиперболическом случае, в силу равенства $U_t(x, 0) = 0$,

$$u_{tt} = U_{tt}(x, t) f(0) + \int_0^t U_{tt}(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau;$$

наконец,

$$L[u] = f(0) L[U] + \int_0^t L[U(x, t-\tau)] f'(\tau)\, d\tau.$$

Так как функция U удовлетворяет дифференциальному уравнению (10), краевому условию $\rho U_x + \lambda U_t = \sigma U$ при $x = l$ и начальным условиям (11), то на основании последних равенств все эти свойства переносятся немедленно и на функцию $u(x, t)$. Наконец, так как $U(0, t) = 1$, имеем:

$$u(0, t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, d\tau = f(t),$$

чем доказывается и первое из краевых условий (12).

4. Метод суперпозиции экспоненциальных решений. Метод интеграла Фурье, рассмотренный для задачи Коши в гл. III, § 6, п. 3, т. е. суперпозиция решений, представленных в виде показательных функций, при целесообразном видоизменении может быть привлечен и к решению нестационарных задач (проблем выравнивания). При этом мы снова ограничимся эвристическим рассмотрением, которое, будучи углублено в § 3, приведет нас к теореме существования. Рассмотрим специальную задачу с условиями: $u(0, t) = 1$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, т. е. ищем функцию $U(x, t)$ предыдущего пункта. Сначала ищем частные решения дифференциального уравнения

$$au_{tt} + bu_t = L[u] \tag{10}$$

вида

$$u = e^{\gamma t} v(x, \gamma) \quad (\gamma = \alpha + i\beta). \tag{14}$$

Эта подстановка дает для v обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[v] = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v, \tag{15}$$

в котором γ играет роль параметра. Если поставить для v в конечной точке $x = l$ краевое условие

$$pv_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v, \tag{16}$$

то функция

$$u = v(x, \gamma)\, e^{\gamma t},$$

очевидно, будет на этом конце удовлетворять заданному краевому условию

$$pu_x + \lambda u_t = \sigma u; \tag{12}$$

следовательно, этому условию удовлетворяет и всякая линейная комбинация решений этого вида с различными значениями параметра γ. Попытаемся теперь суперпозицией таких решений добиться того, чтобы выполнялось также и краевое условие $u(0, t) = 1$ для $t > 0$ и далее, чтобы в начальный момент $t = 0$ господствовало состояние покоя.

Для этой цели предположим, что v и рассматриваемые производные от v являются аналитическими функциями *комплексного* параметра $\gamma = \alpha + i\beta$ в полуплоскости $\alpha > 0$; в таком случае интегрированием вдоль пути L в правой полуплоскости комплексного переменного γ можно получить новые решения дифференциального уравнения (10), удовлетворяющие условию (12), в следующем виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma t} \frac{v(x, \gamma)}{\gamma}\, d\gamma. \tag{17}$$

При $x = 0$ это решение принимает вид

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma t} \frac{v(0, \gamma)}{\gamma}\, d\gamma,$$

и задача состоит в том, чтобы так выбрать путь интегрирования L и находящееся в нашем распоряжении краевое значение $v(0, \gamma)$, чтобы выполнялись условия

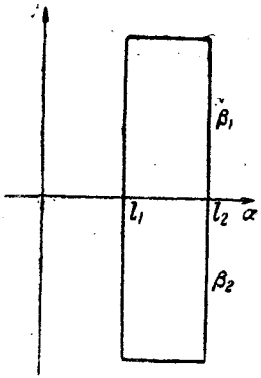
$$u(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t > 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Краевое условие при $x = 0$ будет выполнено, если положить

$$v(0, \gamma) = 1 \tag{16a}$$

и за путь интегрирования L выбрать произвольную прямую, параллельную мнимой оси плоскости γ, расположенную в правой полуплоскости $\alpha > 0$. В самом деле, получающийся при этом интеграл

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta t}}{\alpha + i\beta} d\beta \tag{18}$$



Черт. 9.

на основании элементарных теорем теории функций сходится при всех значениях $\alpha \neq 0$, $t \neq 0$. Так как интеграл

$$\int\limits_{l_1 + i\beta}^{l_2 + i\beta} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma,$$

распространенный на любой отрезок прямой, параллельной действительной оси α, с конечной длиной $l_2 - l_1$, стремится к нулю при возрастании $|\beta|$, то из интегральной теоремы Коши заключаем (ср. черт. 9) обычным образом, что интеграл (18) не зависит от α. Отсюда при $t < 0$, заставляя α стремиться к $+\infty$, немедленно получаем $u(0, t) = 0$. В случае $t > 0$, согласно интегральной теореме Коши, принимая во внимание вычет подинтегральной функции относительно точки $\gamma = 0$, имеем:

$$u(0, t) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma,$$

где α может иметь любое отрицательное значение. Следовательно, выполняя предельный переход $\alpha \to -\infty$, действительно получаем $u(0, t) = 1$ при $t > 0$.

Естественно поэтому ожидать, что при выбранном пути интеграции L выражение

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{17}$$

есть искомое решение задачи п. 3. Конечно, не приходится вообще ожидать, чтобы этот интеграл сходился абсолютно, так как, при

заданном значении x, $U(x, t)$ как функция от t будет, вообще говоря, иметь разрывы.

Однако, если рассматривать при достаточно большом n для начальной функции

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t^n}{n!} & \text{при} \quad t>0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0,\end{cases}$$

выражение

$$U_n(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n!}\int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^{n+1}}e^{\gamma t}\,d\gamma,$$

то этот интеграл тем лучше сходится, чем больше n; в соответствии с этим легче будет проверить, что он является решением задачи I и затем получить функцию U дифференцированием по t. К этим предварительным эвристическим соображениям мы еще вернемся в § 3, где проведем их с несколько видоизмененной точки зрения.

§ 2. Операторный метод Хивисайда

По сравнению с методом, изложенным в § 1, п. 4, с точки зрения практика, *символический метод* Хивисайда имеет большие преимущества. Свое строгое оправдание он получает в связи с основами, данными в § 1 и ниже в § 3. В сущности его можно рассматривать как несколько иное расположение сходных рассуждений, причем вычислительная часть решения задачи целесообразно отделена от математически-содержательной части и притом таким образом, что эта вторая часть приходит в действие лишь в последнем этапе, при реализации полученного символическим путем результата; эта часть может быть заготовлена раз навсегда, так сказать, впрок, в форме таблиц реализованных по содержанию символических операторов, что избавляет практика в каждом отдельном случае от математического рассмотрения по существу.

Основная идея метода состоит в том, что вопрос ставится не непосредственно о решении $u(x, t)$ задачи из § 1, п. 3, но, вернее сказать, предметом вычисления делается самый линейный функциональный процесс, который относит заданной в условии задачи краевой функции $f(t)$ решение $\mu(x, t)$. Мы опять ограничимся рассмотрением проблемы выравнивания в собственном смысле, у которой в начальный момент $t=0$ задано состояние покоя.

1. Простейшие операторы. Основу метода составляет введение *операторов дифференцирования* и *интегрирования*, p и p^{-1}, как взаимно-обратных операций. Введем в рассмотрение для функций времени t при $t>0$ операторы интегрирования p^{-1} и дифференцирования p соответственно равенствами

$$p^{-1}f(t)=g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$pg(t)=f(t)=\frac{dg}{dt}; \tag{2}$$