заданном значении x, $U(x, t)$ как функция от t будет, вообще говоря, иметь разрывы.

Однако, если рассматривать при достаточно большом n для начальной функции

$$f(t)=\begin{cases}\frac{t^n}{n!} & \text{при} \quad t>0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0,\end{cases}$$

выражение

$$U_n(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{n!}\int\limits_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^{n+1}}e^{\gamma t}\,d\gamma,$$

то этот интеграл тем лучше сходится, чем больше n; в соответствии с этим легче будет проверить, что он является решением задачи I и затем получить функцию U дифференцированием по t. К этим предварительным эвристическим соображениям мы еще вернемся в § 3, где проведем их с несколько видоизмененной точки зрения.

§ 2. Операторный метод Хивисайда

По сравнению с методом, изложенным в § 1, п. 4, с точки зрения практика, *символический метод* Хивисайда имеет большие преимущества. Свое строгое оправдание он получает в связи с основами, данными в § 1 и ниже в § 3. В сущности его можно рассматривать как несколько иное расположение сходных рассуждений, причем вычислительная часть решения задачи целесообразно отделена от математически-содержательной части и притом таким образом, что эта вторая часть приходит в действие лишь в последнем этапе, при реализации полученного символическим путем результата; эта часть может быть заготовлена раз навсегда, так сказать, впрок, в форме таблиц реализованных по содержанию символических операторов, что избавляет практика в каждом отдельном случае от математического рассмотрения по существу.

Основная идея метода состоит в том, что вопрос ставится не непосредственно о решении $u(x, t)$ задачи из § 1, п. 3, но, вернее сказать, предметом вычисления делается самый линейный функциональный процесс, который относит заданной в условии задачи краевой функции $f(t)$ решение $\mu(x, t)$. Мы опять ограничимся рассмотрением проблемы выравнивания в собственном смысле, у которой в начальный момент $t=0$ задано состояние покоя.

1. Простейшие операторы. Основу метода составляет введение *операторов дифференцирования* и *интегрирования*, p и p^{-1}, как взаимно-обратных операций. Введем в рассмотрение для функций времени t при $t>0$ операторы интегрирования p^{-1} и дифференцирования p соответственно равенствами

$$p^{-1}f(t)=g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

$$pg(t)=f(t)=\frac{dg}{dt}; \tag{2}$$

для построения исчисления с правилами, соответствующими правилам алгебры, коренную важность представляет тот факт, *что операторы* p *и* p^{-1} *взаимно-обратны или, символически, что*

$$pp^{-1} = p^{-1}p = 1. \tag{3}$$

Для того, чтобы обеспечить это соотношение, мы должны ввести следующее ограничение: *оператор* p *может применяться лишь к таким функциям* $g(t)$, *для которых* $g(0) = 0$.

В противном случае мы бы имели:

$$p^{-1}pg = \int_0^t \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau = g(t) - g(0),$$

$$pp^{-1}g = \frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau)\, d\tau = g(t),$$

и, следовательно,

$$p^{-1}pg \neq pp^{-1}g.$$

В противоположность оператору p *оператор* p^{-1} *приложим к любым непрерывным функциям.*

Пусть

$$Q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$$

— какой-либо полином степени m; мы можем теперь естественно определить оператор $Q(p^{-1})$, приложимый к любой кусочно-непрерывной функции $f(t)$ (*целый рациональный оператор*). Соответствующий оператор $Q(p)$ определяется так же, как линейный дифференциальный оператор порядка m, конечно, лишь в предположении, что функция f, к которой он применяется, при $t = 0$ исчезает вместе со своими производными до $m - 1$ порядка.

Если

$$P(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_n\lambda^n$$

— другой полином степени n и $Q(0) = a_0 \neq 0$, то оператор

$$R(p^{-1}) = \frac{P(p^{-1})}{Q(p^{-1})} \tag{4}$$

называют *дробно-рациональным регулярным оператором*. При этом выражение

$$R(p^{-1})f(t) = g(t)$$

может быть определено по-разному.

Во-первых, функцию g для заданной кусочно-непрерывной при $t > 0$ функции f можно толковать как однозначно-определенное решение дифференциального уравнения

$$a_0 g^{(m)} + a_1 g^{(m-1)} + \ldots + a_m g = \varphi^{(m)}, \tag{5}$$

где

$$\varphi = P(p^{-1})f$$

есть известная функция, при нижеследующих начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} a_0 g(0) &= \varphi(0), \\ a_0 g'(0) + a_1 g(0) &= \varphi'(0), \\ a_0 g''(0) + a_1 g'(0) + a_2 g(0) &= \varphi''(0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 g^{(m-1)}(0) + a_1 g^{(m-2)}(0) + \ldots + a_{m-1} g(0) &= \varphi^{(m-1)}(0). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Во-вторых, функцию g можно определить, разлагая рациональную функцию $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = R(\lambda)$ в окрестности начала координат в степенной ряд по λ:

$$R(\lambda) = \sum_0^\infty \alpha_\nu \lambda^\nu.$$

Нетрудно обнаружить, что соответствующий ряд

$$R(p^{-1})f = \sum \alpha_\nu p^{-\nu} f(t)$$

сходится при всех положительных значениях t и совпадает с прежним определением функции $g(t)$.

Если коэффициент $a_0 = 0$, то рациональный оператор называется *нерегулярным*, причем в этом случае его, наверно, можно представить в виде

$$p^k R(p^{-1}),$$

где R — регулярный оператор. Для применимости такого оператора к функции f надо последнюю подчинить условиям

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0.$$

Легко видеть, что с этими рациональными операторами можно производить вычисления по правилам рациональных действий алгебры.

Прием Дюамеля, проведенный в § 1, п. 3, в операторной терминологии может быть изложен следующим образом:

Если произвольную пока функцию $f(t)$ заменить «единичной функцией» $\eta(t)$, определенной равенствами

$$\eta(t) = 1 \quad \text{для} \quad t \geqslant 0,$$
$$\eta(t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0,$$

и если для оператора T имеет место соотношение

$$T\eta(t) = H(t), \quad (7)$$

то

$$Tf(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \quad (7a)$$

Существенно характерным для операторного исчисления является следующий прием: пытаются также и другим функциям от p

или $\frac{1}{p}$, отличным от рассмотренных до сих пор рациональных функций, приписать такой смысл, чтобы в расширенной операторной области были справедливы правила алгебраических преобразований, принцип Дюамеля и другие правила, которые будут рассмотрены впоследствии [1]).

2. Примеры. 1. Для оператора

$$T = \frac{1}{1 + \alpha p^{-1}}$$

имеем:

$$T\eta = e^{-\alpha t}, \qquad Tf(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = g(t).$$

Действительно, функция g удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g' + \alpha g = f'$$

и начальному условию

$$g(0) = f(0).$$

2. Для оператора

$$T = \frac{1}{1 + \nu^2 p^{-2}}$$

имеем:

$$T\eta = \cos \nu t, \qquad Tf = g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau) \cos \nu (t - \tau)\, d\tau.$$

В самом деле, g есть решение дифференциального уравнения

$$g'' + \nu^2 g = f'',$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$g(0) = f(0), \qquad g'(0) = f'(0).$$

3. Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэфициентами

$$a_0 u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \ldots + a_m u = f(t) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0. \tag{8a}$$

При этих начальных условиях можно записать дифференциальное уравнение символически в следующем виде:

$$Q(p)\, u = f(t); \qquad Q(\lambda) = a_0 \lambda^m + \ldots + a_m.$$

Решение получится символически в виде

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t). \tag{9}$$

Если алгебраическое уравнение

$$Q(\lambda) = 0$$

---

[1]) Кстати заметим, что в литературе единичная функция $\eta(t)$ часто не выписывается и что в таком случае под операторным символом T надо разуметь просто функцию $T\eta$.

имеет n различных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$, то решение, записанное в символическом виде, можно реализовать весьма изящным способом, с помощью разложения на элементарные дроби. Исходя из формулы

$$\frac{1}{pQ(p)} = \frac{c_0}{p} + \sum_1^m \frac{c_\nu}{p - \alpha_\nu},$$

получаем:

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t) = c_0 f(t) + \sum_1^m c_\nu \frac{p}{p - \alpha_\nu} f(t).$$

В том частном случае, когда

$$f(t) = e^{i\omega t} \eta(t) \qquad (i\omega \neq \alpha_\nu),$$

вместо того, чтобы пользоваться для реализации интегралом Дюамеля сообразно с примером 1, можно дальше итти следующим более элегантным путем.

Согласно примеру 1, выражаем функцию $f(t)$ символически:

$$f(t) = \frac{p}{p - i\omega} \eta,$$

после чего имеем:

$$u = \frac{p}{L(p)} \eta,$$

где для сокращения положено

$$L(p) = (p - i\omega) Q = a_0 (p - \alpha_1) \ldots (p - \alpha_m)(p - i\omega).$$

Этот рациональный оператор, на основании известного разложения на элементарные дроби, можно привести к виду

$$\frac{p}{L(p)} = \frac{d_0 p}{p - i\omega} + \sum_1^m \frac{d_\nu p}{p - \alpha_\nu},$$

причем коэффициенты разложения выражаются следующими формулами:

$$d_0 = \frac{1}{Q(i\omega)}, \qquad d_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu - i\omega} \frac{1}{Q'(\alpha_\nu)}.$$

Принимая теперь во внимание наш первый пример, получим искомое решение:

$$u = d_0 e^{i\omega t} + \sum_{\nu=1}^m d_\nu e^{\alpha_\nu t}. \tag{10}$$

Для приложений, естественно, важнее всего коэффициент d_0.

4. В качестве дальнейшего примера рассмотрим «особенные» или «нерегулярные» операторы

$$\sqrt{p}, \quad \frac{1}{\sqrt{p}}; \tag{11}$$

для того, чтобы достигнуть разумного расширения операторной области, мы должны их определить в согласии с изложенными выше правилами. Принимая во внимание теорию дифференцирования и интегрирования дробного порядка, естественно дать этим операторам следующее определение:

$$\left.\begin{aligned} &p^{-1/2}\eta = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}; \qquad p^{-1/2}f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,f(\tau)\,d\tau, \\ &p^{1/2}\cdot\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}; \qquad p^{1/2}f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

И, действительно, это определение находится в согласии с требованием

$$p^{-1/2}p^{-1/2}\eta = p^{-1}\eta.$$

К тому же определению можно притти, исходя из следующего рассмотрения. При n целом и положительном $p^{-n}\eta = c\,t^n$, где $c = \frac{1}{n!}$ — постоянная. Естественно поэтому положить

$$p^{-1/2}\eta = c\sqrt{t},$$

где постоянную c надлежит теперь определить подходящим образом. Если потребовать для этой цели, чтобы принцип Дюамеля оставался в силе и чтобы существовало соотношение $p^{-1/2}p^{-1/2}\eta = p^{-1}\eta = t$, мы автоматически получим:

$$t = c^2\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\sqrt{\tau}\,d\tau = 2c^2 t\int_0^1 \sqrt{1-\tau}\sqrt{\tau}\,d\tau = c^2\frac{\pi}{4}t.$$

Следовательно, $c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, и, таким образом, постоянная c установлена в согласии с данным выше определением.

5. Очень важный нерациональный оператор, *экспоненциальный оператор*, вводится, для постоянного h, при помощи следующего определения:

$$e^{-hp}f(t) = f(t-h). \tag{13}$$

Это определение подсказывается разложением функции $f(t-h)$ в ряд Тэйлора. Однако, это наводящее рассмотрение никоим образом не может служить обоснованием, так как определение не должно быть связываемо с аналитическим характером функции $f(t)$, поскольку нам приходится часто рассматривать функции $f(t)$, исчезающие при отрицательных значениях t.

Введение нашего определения оправдывается, скорее, тем обстоятельством, что для него выполняются непосредственно соотношения

$$e^{-hp}e^{-kp}f(t)=e^{-(k+h)p}f(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial h}e^{-hp}f(t)=-pe^{-hp}f(t),$$

из которых последнее эквивалентно равенству

$$\frac{\partial}{\partial h}f(t-h)=-\frac{\partial}{\partial t}f(t-h).$$

6. Рассмотрим еще оператор

$$e^{-h\sqrt{p}} \tag{14}$$

при $h>0$. Его реализацией мы займемся в п. 5. Однако, мы сделаем уже здесь следующее замечание, типичное для операторных методов как методов прямых. Допуская, что наш оператор можно дифференцировать по параметру h, из равенства

$$e^{-h\sqrt{p}}f=g$$

получим:

$$\frac{\partial g}{\partial h}=-\sqrt{p}\,e^{-h\sqrt{p}}f.$$

Если нас интересует значение функции $\frac{\partial g}{\partial h}$ лишь для значения параметра $h=0$, то можно ожидать, что это значение дается выражением

$$\left.\frac{\partial g}{\partial h}\right|_{h=0}=-\sqrt{p}f=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \tag{15}$$

В качестве последнего примера в этой связи рассмотрим так называемый *принцип смещения* Хивисайда:

Пусть $T=\Phi(p)$—оператор, а k—постоянная. В таком случае оператор $\Phi(p+k)$ дается формулой

$$\Phi(p+k)=e^{-kt}\Phi(p)e^{kt}. \tag{16}$$

Для всех рациональных регулярных операторов доказательство можно вести следующим образом. Сначала нетрудно показать переходом от n к $n+1$, что принцип смещения справедлив для оператора $\frac{1}{p^n}$. Далее, то же самое следует для всех рациональных регулярных операторов, ибо их можно представить в виде рядов, расположенных по степеням $\frac{1}{p}$. Для нерегулярных операторов этот принцип смещения служит для естественного определения оператора $\Phi(p+k)$. Вводят, например, определение

$$\sqrt{p+\alpha^2}f(t)=e^{-\alpha^2t}\sqrt{p}\,e^{\alpha^2t}f(t)=\frac{e^{-\alpha^2t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{e^{\alpha^2\tau}f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \tag{17}$$

и, в частности,

$$\sqrt{p+\alpha^2}\,\eta(t)=\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{e^{\alpha^2\tau}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha^2 t}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}e^{-\tau^2}d\tau\right). \qquad (18)$$

Для всех этих иррегулярных операторов, вновь определенных с помощью наводящих соображений, соображений естественности, еще предстоит дать удовлетворительное оправдание, т. е. доказательство того факта, что их введение находится в согласии с элементарными правилами алгебраических действий. Это оправдание мы дадим дополнительно в п. 5.

3. Приложения к теории теплопроводности. Применения операторного метода к изучению процессов выравнивания мы поясним на нескольких типичных примерах.

1. Уравнение теплопроводности

$$u_t-u_{xx}=0 \qquad (19)$$

для односторонне-бесконечного интервала.

Начальные и краевые условия пусть будут следующие:

$$u(x,0)=0;\qquad u(0,t)=f(t),\qquad u(\infty,t)=0.$$

Пусть оператор $T=T(x)$, зависящий от x как от параметра, преобразовывает заданную функцию $f(t)$ в искомое решение $u(x,t)$. Для того, чтобы найти оператор T, пишем дифференциальное уравнение в виде

$$(T_{xx}-pT)f=0, \qquad (20)$$

а краевые условия, выбирая сначала функцию $f(t)=\eta(t)$ единичной функцией, в следующем виде:

$$T(0)=1,\qquad T(\infty)=0.$$

Начальное условие уже принято во внимание тем, что мы положили $u_t=pTf$. Решая дифференциальное уравнение

$$T_{xx}-pT=0$$

так, как будто p есть параметр, получим тотчас решение

$$T=e^{-x\sqrt{p}}. \qquad (21)$$

Возникает вопрос, как реализовать это символическое выражение или какие функции представляют выражения

$$e^{-x\sqrt{p}}\eta;\qquad e^{-x\sqrt{p}}f(t).$$

Не будучи еще в состоянии в настоящий момент ответить надлежащим образом на эти вопросы, мы можем все же уже сейчас дать ответ на один частный вопрос, который при известных обстоятельствах может оказаться для практики единственно интересным. А именно, можно найти в явном виде количество теплоты, протекающее в единицу времени через начальную точку, т. е. выражение

$u_x(0, t)$, обращаясь с оператором p по обычным вычислительным правилам. При этом получаем, учитывая найденный выше результат из п. 2, пример 6:

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p} f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Как раз в возможности получать такие частные результаты, хотя и не будучи в состоянии добиться полной реализации операторов через просто выраженные функции, и заключается главное преимущество операторного исчисления.

2. Общее уравнение теплопроводности. Аналогичным образом можно решать и более общее уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = 0$$

для интервала $0 \leqslant x < \infty$ при тех же начальных и краевых условиях, что и раньше. Для оператора $T(x)$, с помощью которого получается решение $u(x, t) = T(x) f(t)$, получаем символическую задачу с дифференциальным уравнением

$$T_{xx} = (p + \alpha^2) T \tag{22}$$

и краевыми условиями

$$T(0) = 1, \qquad T(\infty) = 0.$$

Формальное решение гласит:

$$T = e^{-x\sqrt{p+\alpha^2}}. \tag{23}$$

Этот оператор мы еще менее в состоянии реализовать вообще, чем оператор предыдущего примера. Однако, для имеющей самостоятельный интерес частной задачи определения величины $u_x(0, t)$ немедленно находим следующее соотношение:

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p + \alpha^2} f = -\frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\alpha^2 \tau} f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

причем выражение справа взято из п. 2.

В частном случае единичной функции $f = \eta$ имеем:

$$u_x(0, t) = -\frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha^2 t} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau \right). \tag{24}$$

4. Волновое уравнение. С точки зрения операторного исчисления получают новое освещение и те две простые задачи, которые были решены в § 1, п. 1. Рассмотрим, например, для интервала $0 \leqslant x \leqslant l$ задачу нахождения решения дифференциального уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{25}$$

удовлетворяющего начальным и краевым условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \qquad u(0, t) = f(t), \qquad u_x(l, t) = 0.$$

Положим

$$u(x, t) = T(x) f.$$

Для оператора T получается дифференциальное уравнение

$$T_{xx} - p^2 T = 0 \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$T(0) = 1, \qquad T_x(l) = 0.$$

Символическое решение имеет вид

$$T(x) = \frac{\operatorname{ch} p(l-x)}{\operatorname{ch} pl} = \frac{e^{-px} + e^{-p(2l-x)}}{1 + e^{-2pl}}. \tag{27}$$

Разлагаем его в ряд

$$T(x) = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}].$$

Реализация этого оператора выполняется теперь просто на основании п. 2, пример 5, причем получаем:

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)] \tag{28}$$

в полном согласии с результатом, полученным в § 1, п. 1.

Аналогичным образом можно, понятно, решить и другую задачу, рассмотренную там же, причем для соответствующего оператора получится символическое выражение

$$T(x) = \frac{\operatorname{sh} p(l-x)}{\operatorname{sh} pl} \tag{29}$$

или

$$T = e^{-px} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}],$$

откуда

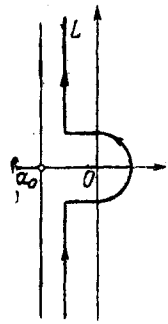
$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)]. \tag{30}$$

***5. Метод обоснования операторного исчисления. Реализация дальнейших операторов.** Операторное исчисление получит строгое обоснование, если дать для наших операторов общую реализацию с помощью явного определения и показать, что на основании этого определения справедливы установленные правила вычислений, теорема смещения и принцип Дюамеля и что это определение находится в согласии с данными ранее определениями. Соображения, изложенные в § 1, п. 4, мотивируют следующее определение:

Пусть $F(\gamma)$ — регулярная аналитическая функция переменной $\gamma = \alpha + i\beta$ в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$. Пусть L — любая прямая, параллельная мнимой оси и расположенная в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$, если $\alpha_0 \geqslant 0$; в случае же $\alpha_0 < 0$ пусть L есть прямая $\alpha = \text{const.} > 0$

или «путь с обходом» вида, изображенного на черт. 10. *Тогда, если существует, независимо от специального выбора пути* L, *интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma$ *при всяком* $t>0$, *то вводим определение*

$$\left.\begin{aligned} F(p)\eta &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \\ \text{и} \qquad & \\ F(p)f &= \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma(t-\tau)} d\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$



Черт. 10.

Достаточным условием для существования интегралов (31) является, например, следующее: существует положительная функция $\Phi(\rho)$, для которой $\int\limits_0^\infty \Phi(\rho)\, d\rho$ сходится, причем для всех значений $\gamma=\alpha+i\beta$ с $\alpha\geqslant\alpha_0+\delta$, $\delta>0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{F(\gamma)}{\gamma}\right| \leqslant \Phi(|\beta|).$$

При этом предположении можно во втором из интегралов (31) выполнить интегрирование по τ под знаком интеграла; полагая в соответствии с этим

$$D(\gamma, t) = \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau,$$

получим:

$$F(p)f = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} D(\gamma, t) e^{\gamma t} d\gamma.$$

Справедливость правил алгебраических действий для определенных таким образом операторов обеспечивается *теоремой умножения*

$$F(p)\,G(p) = FG(p), \qquad (32)$$

т. е. *результат последовательного применения двух операторов* F *и* G *можно также получить, применяя оператор, соответствующий произведению функций* F *и* G.

Эту теорему достаточно доказать для единичной функции $\eta(t)$; это можно выполнить сравнительно просто, если сделать дальнейшие предположения о функциях F и G[1]).

---

[1]) Доказательство с этими предположениями еще отнюдь не достаточно для обоснования операторного исчисления в необходимом объеме. Ср., однако, например, Koppenfels, *Math. Ann.*, т. 105, стр. 694 и следующие, где эта теорема доказывается при значительно более слабых предположениях.

Пусть во всякой полуплоскости $\alpha \geqslant \alpha_0 + \delta$ существует такая положительная функция $\psi(\rho)$ со сходящимся интегралом $\int\limits_0^\infty \psi^2 d\rho$, что всюду в этой полуплоскости

$$|F| \leqslant \psi(|\beta|), \qquad |G| \leqslant \psi(|\beta|).$$

В таком случае существуют также интегралы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi}{\rho} d\rho \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty \frac{\psi^2}{\rho} d\rho$$

(первый из них — в силу неравенства Шварца

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi}{\rho} d\rho \leqslant \sqrt{\int\limits_1^\infty \psi^2 d\rho} \sqrt{\int\limits_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2}}\Big),$$

и интегралы вида (31), соответствующие функциям F, G, FG, сходятся абсолютно. Полагая теперь

$$f(t) = G(p)\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{G(\delta)}{\delta} e^{\delta t} d\delta$$

и

$$D(\gamma, t) = \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{G(\delta)}{\delta} \frac{e^{(\delta-\gamma)t} - 1}{\delta - \gamma} d\delta,$$

получим:

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} D(\gamma, t) e^{\gamma t} d\gamma.$$

Нетрудно установить на основании наших предположений, что дифференцирование под знаком интеграла дает всегда интегралы, равномерно сходящиеся в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_1 > 0$; поэтому

$$FG\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} d\gamma \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta} \frac{\delta e^{\delta t} - \gamma e^{\gamma t}}{\delta - \gamma} d\delta.$$

При этом за путь L' надо выбрать прямую, лежащую справа от пути L (см. черт. 11). Вторая составная часть внутреннего интеграла, как это вытекает из оценки

$$\left| \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{(\delta - \gamma)\delta} d\delta \right| \leqslant \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int \left| \frac{G(\delta)}{\delta} \right| d\beta',$$

с возрастанием α' стремится к нулю и, следовательно, вообще равна нулю. Следовательно,

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} d\gamma \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta - \gamma} e^{\delta t} d\delta.$$

В этом двойном интеграле, в силу наших предположений, можно изменить порядок интеграции[1]), откуда

$$FG\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Остается, следовательно, только доказать соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma = \frac{F(\delta)}{\delta},$$

но оно есть следствие интеграла Коши.

Обоснование *теоремы смещения* тоже получается непосредственно из комплексного интегрального представления.

Если $F(p)$ есть данный оператор, так что

$$F(p)\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma,$$

то

$$F(p+k)\eta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma+k)\, e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma =$$

$$= \frac{e^{-kt}}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{F(\gamma)\,\gamma}{\gamma-k}\,\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma,$$

а это значит, что

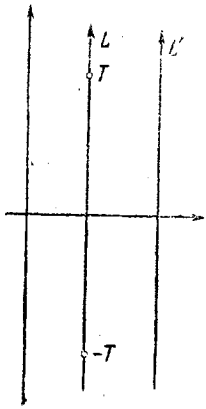
$$F(p+k)\eta = e^{-kt} F(p)\, \frac{p}{p-k}\, \eta.$$

Так как

$$\frac{p}{p-k}\eta = e^{kt}\eta,$$

то отсюда вытекает, что

$$F(p+k)\eta = e^{-kt} F(p)\, e^{kt}\eta.$$



Черт. 11.

---

[1]) Пусть L_1 есть конечный отрезок прямой L между ординатами $-T$ и $+T$; в таком случае

$$FG\eta = \lim_{L_1 \to L} \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \int\limits_{L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Наше утверждение вытекает теперь из оценки

$$\left|\int\limits_{L-L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma\right| \leqslant \frac{1}{|\delta|}\sqrt{2\int\limits_{T}^{\infty} \psi^2\, d\rho}\cdot\sqrt{2\int\limits_{L}\left(\frac{1}{|\gamma|^2}+\frac{1}{|\gamma-\delta|^2}\right) d\beta}$$

и из сходимости интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} \psi^2\, d\rho$.

Столь же легко установить для ранее рассмотренных примеров согласие прежних определений с нынешним интегральным определением. Покажем это на ряде примеров[1]).

1. $$\frac{1}{p^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{n+1}}\,d\gamma \qquad (\text{целое } n \geqslant 1).$$

Путь интегрирования L можно деформировать в любую кривую, окружающую нулевую точку; следовательно,

$$\frac{1}{p^n}=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\gamma^n}e^{\gamma t}\right]_{\gamma=0}=\frac{t^n}{n!}.$$

2. $$\frac{p}{p+\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma+\alpha}\,d\gamma=e^{-\alpha t}.$$

3. $$\frac{p}{(p+\alpha)^{n+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{(\alpha+\gamma)^{n+1}}\,d\gamma=e^{-\alpha t}\frac{t^n}{n!}.$$

4. $$\sqrt{p}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma.$$

Заменяя переменную интеграции γ через $\varkappa=\sqrt{\gamma}$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'} e^{\varkappa^2}\,d\varkappa.$$

Путем интегрирования L' в плоскости $\varkappa$ служит (ср. § 3, п. 3) правая ветвь любой равносторонней гиперболы; этот путь эквивалентен мнимой оси. Отсюда

$$\sqrt{p}=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

5. $$p^s=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma=t^{-s}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma.$$

Значение интеграла находим аналогично примеру 5

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma=\frac{1}{\Gamma(1-s)},$$

и, следовательно,

$$p^s=\frac{t^{-s}}{\Gamma(1-s)}. \qquad (s<1).$$

6. $$e^{-kp}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{(t-k)\gamma}}{\gamma}\,d\gamma=\begin{cases}0 & (t<k),\\ 1 & (t>k).\end{cases}$$

7. $$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2+a^2}\,d\gamma.$$

---

[1]) В нижеследующих примерах мы ради краткости пишем $F(p)$ вместо выражения $F(p)\,\eta$.

Деформируя путь L в кривую, окружающую точки $\pm ia$, получим:

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\gamma t}\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{\gamma-ia}-\frac{1}{\gamma+ia}\right)d\gamma=\frac{\sin at}{a}.$$

8. В качестве примера реализации дальнейших операторов рассмотрим оператор

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{-x\sqrt{\gamma}+t\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma. \tag{33}$$

Интеграл в правой части нетрудно вычислить с помощью комплексного интегрирования, причем получим:

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{34}$$

Отсюда можно получить реализацию оператора $e^{-x\sqrt{p}}$, который нам уже встретился раньше, следующим путем:

$$e^{-x\sqrt{p}}=\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}=\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t},$$

откуда

$$e^{-x\sqrt{p}}=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t-\tau}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau.$$

9. В качестве других применений нашего процесса реализации, допускающих легкую проверку, упомянем следующие формулы:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}\,d\gamma=J_0(at). \tag{35}$$

Эта формула приводит к интересному приложению теоремы умножения. Разложим оператор $\frac{p}{p^2+a^2}$ в произведение трех сомножителей

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{1}{p}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}\,\frac{p}{\sqrt{p^2+a^2}}.$$

Тогда на основании принципа Дюамеля

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\int\limits_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau.$$

С другой стороны, согласно примеру 7,

$$\frac{p}{p^2+a^2}=\frac{\sin at}{a}.$$

Таким образом, мы получаем непосредственно следующую *интегральную теорему для бесселевых функций*:

$$\int\limits_0^t J_0(a(t-\tau))\,J_0(a\tau)\,d\tau=\frac{\sin at}{a}. \tag{36}$$

10. В заключение рассмотрим (ср. т. I, стр. 146) *интегральное уравнение Абеля*

$$f(t)=\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau \qquad (0<\alpha<1). \tag{37}$$

Его можно записать в виде операторного уравнения

$$pf=\Gamma(1-\alpha)\,p^\alpha\varphi,$$

решение которого есть

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,p^{1-\alpha}f$$

или в раскрытом виде

$$\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau. \tag{38}$$

Отсюда на основании формулы

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

имеем окончательно:

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau \tag{39}$$

в согласии с результатом, полученным в т. I, стр. 147.

§ 3. К общей теории нестационарных задач

Операторный метод одинаково просто применим к разнообразнейшим задачам. Однако, подчинение всех этих возможностей одной всеобъемлющей теореме, повидимому, требует по меньшей мере сложных формулировок. Мы здесь отказываемся от полного проведения такой попытки, но сделаем по крайней мере первый шаг в этом направлении, следуя пути, намеченному в § 1, п. 4. Мы не только покажем, как можно обосновать операторный метод, но и сформулируем теорему, которой подчиняются уже сравнительно сложные примеры. При этом на передний план выступит преобразование Лапласа, которое для аналогичных целей впервые применил Дэч (G. Doetsch)[1].

1. Преобразование Лапласа. К формулам преобразования Лапласа можно легко притти, если в обеих теоремах об интегральных формулах Мелина (Mellin, ср. т. I, стр. 95) заменить переменную x через e^{-x} и функцию $g(x)$ — через $g(e^{-x})=\varphi(x)$. Однако, мы проведем доказательство *формул обращения Лапласа* еще раз, независимо, при несколько более широких предположениях.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(s)$ — регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha<\sigma<\beta$ плоскости комплексного переменного*

[1]) Ср. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.