

10. В заключение рассмотрим (ср. т. I, стр. 146) *интегральное уравнение Абеля*

$$f(t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (0 < \alpha < 1). \quad (37)$$

Его можно записать в виде операторного уравнения

$$pf = \Gamma(1 - \alpha) p^\alpha \varphi,$$

решение которого есть

$$\varphi = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} p^{1-\alpha} f$$

или в раскрытом виде

$$\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau. \quad (38)$$

Отсюда на основании формулы

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha},$$

имеем окончательно:

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (39)$$

в согласии с результатом, полученным в т. I, стр. 147.

§ 3. К общей теории нестационарных задач

Операторный метод одинаково просто применим к разнообразнейшим задачам. Однако, подчинение всех этих возможностей одной всеобъемлющей теореме, повидимому, требует по меньшей мере сложных формулировок. Мы здесь отказываемся от полного проведения такой попытки, но сделаем по крайней мере первый шаг в этом направлении, следуя пути, намеченному в § 1, п. 4. Мы не только покажем, как можно обосновать операторный метод, но и сформулируем теорему, которой подчиняются уже сравнительно сложные примеры. При этом на передний план выступит преобразование Лапласа, которое для аналогичных целей впервые применил Дэч (G. Doetsch)¹⁾.

1. Преобразование Лапласа. К формулам преобразования Лапласа можно легко притти, если в обеих теоремах об интегральных формулах Мелина (Mellin, ср. т. I, стр. 95) заменить переменную x через e^{-x} и функцию $g(x)$ — через $g(e^{-x}) = \varphi(x)$. Однако, мы проведем доказательство *формул обращения Лапласа* еще раз, независимо, при несколько более широких предположениях.

Теорема 1. Пусть $\varphi(s)$ — регулярная аналитическая функция в полосе $\alpha < \sigma < \beta$ плоскости комплексного переменного

¹⁾ Ср. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.

$s = \sigma + i\tau$. Во всякой более узкой полосе $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ ($\delta > 0$ и постоянно) пусть существует такая положительная функция $\Phi(\rho)$, что $\int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho$ сходится и что всюду в этой полосе

$$|\varphi(s)| \leq \Phi(|\tau|) \quad (s = \sigma + i\tau). \quad (1)$$

При этих условиях, для действительных значений x и для постоянной σ существует интеграл

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{xs} \varphi(s) ds, \quad (2)$$

и в полосе $\alpha < \sigma < \beta$ имеет место соотношение

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-xs} dx. \quad (3)$$

Теорема 2. Если $\psi(x)$ есть кусочно-гладкая функция для действительных значений x и если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-sx} dx$ сходится абсолютно при $\alpha < \sigma < \beta$, то из равенства

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-xs} dx \quad (\alpha < \sigma < \beta) \quad (3)$$

вытекает обратная формула (2).

Дополнительное предложение. Если $\beta = \infty$, т. е. функция $\varphi(s)$ регулярна и подчинена дальнейшим сделанным предположениям во всей полуплоскости $\sigma > \alpha^1$), то $\psi(x) = 0$ при $x < 0$. Следовательно, в этом случае формулы обращения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \varphi(s) e^{xs} ds, \\ \varphi(s) &= \int_0^{\infty} \psi(x) e^{-xs} dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Докажем сначала теорему 2. Пусть

$$\psi_T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \varphi(s) e^{xs} ds = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int_{-T}^T \varphi(\sigma + i\tau) e^{ix\tau} d\tau.$$

¹⁾ В частности, функция $\Phi(\rho)$ существует для всех значений $\sigma \geq \alpha + \delta$.

Вместо $\varphi(\sigma + i\tau)$ подставим значение

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-\xi(\sigma+i\tau)} d\xi.$$

Имеем:

$$\psi_T(x) = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-\xi\tau} e^{-\xi(x-\tau)} d\xi.$$

Так как функция $\psi(x)e^{-x\sigma}$ — кусочно-гладкая, а $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| e^{-x\sigma} dx$

сходится при всяком фиксированном значении σ из интервала $\alpha < \sigma < \beta$, то на основании интегральной теоремы Фурье (ср. т. I, стр. 70 и следующие) с возрастанием T интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) e^{-\xi\tau} e^{-\xi(x-\tau)} d\xi$$

сходится к функции $\psi(x)e^{-x\sigma}$ и, следовательно, $\psi_T(x)$ сходится к $\psi(x)$, как это и утверждает теорема 2.

Для доказательства теоремы 1 напишем интеграл

$$\psi(x) = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sigma + i\tau) e^{i\tau x} d\tau,$$

который при сделанных предположениях сходится абсолютно в интервале $\alpha < \sigma < \beta$. Покажем, что этот интеграл не зависит от σ . Согласно обычному способу рассмотрения, на основании теоремы Коши, это имеет место в том случае, если интеграл

$$J = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi(\sigma + iT) e^{ix(\sigma+iT)} d\sigma,$$

распространенный на отрезок прямой, параллельной действительной оси, постоянной длины $\sigma_2 - \sigma_1 > 0$, целиком лежащий в полосе $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$, стремится к нулю, когда $|T|$ пробегает подходящую последовательность безгранично возрастающих значений $|T_1|, |T_2|, \dots$ (см. черт. 12). Но это последнее вытекает из оценки

$$|J| \leq e^{|x|\sigma_2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi(\sigma + iT)| d\sigma \leq e^{|x|\sigma_2} \Phi(|T|)(\sigma_2 - \sigma_1).$$

Действительно, из существования интеграла $\int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho$ вытекает, что должна существовать последовательность значений T_1, T_2, \dots , для которой $\Phi(|T|)$ стремится к нулю.

Из равенства

$$\psi(x) e^{-sx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s - it) e^{-itx} dt$$

следует, что $\psi(x) e^{-sx}$ есть результат трансформации по Фурье функции $\varphi(s - it)$, заведомо кусочно-гладкой по отношению к t ; следовательно, теперь

в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(s - it)| dt$
по теореме обращения Фурье

$$\varphi(s - it) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-sx + itx} dx,$$

т. е.

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-sx} dx,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства дополнительного предложения заметим, что при сделанном в нем предположении имеет место оценка

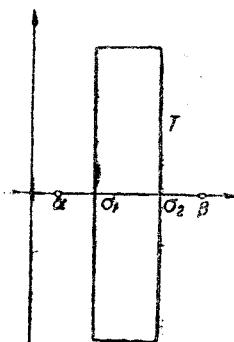
$$|\psi(x)| \leq e^{sx} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\rho) d\rho, \quad (5)$$

справедливая для всех значений $s \geq \alpha + \delta$ и для всех значений x . Если x отрицателен, то правая часть сколь угодно мала при достаточно большом значении s и, следовательно,

$$\psi(x) \equiv 0 \text{ при } x < 0,$$

и дополнительное предложение доказано.

2. Решение нестационарных задач с помощью преобразования Лапласа. Теперь мы в состоянии задачу I из § 1 решить более мощным способом также и при том предположении, что начальное состояние не является состоянием покоя. Решение основывается на возможности привести эту задачу I к другой задаче — II, которая содержит одной независимой переменной меньше и которой наша задача эквивалентна в силу прямого и обратного преобразования Лапласа. Эта задача II во многих случаях допускает простое решение в явном виде. Желательно, чтобы предположения, при которых производятся наши преобразования, были настолько широки, чтобы охватить действительно случаи, практически встречающиеся в приложениях.



Черт. 12.

Мы ставим для интересующего нас решения $u(x, t)$ задачи I следующее требование: существует такое действительное число α_0 , что при безграничном возрастании t функции

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) e^{-\alpha_0 t}, \\ u_x(x, t) e^{-\alpha_0 t}, \\ u_{xx}(x, t) e^{-\alpha_0 t} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

остаются ограниченными равномерно относительно x .

При этом условии для $\Re\gamma = \alpha > \alpha_0$ существует лапласова сопряженная функция

$$\frac{v}{\gamma} = \int_0^\infty u(x, t) e^{-\gamma t} dt,$$

представляющая в полуплоскости $\alpha > \alpha_0$ регулярную аналитическую функцию от $\gamma = \alpha + i\beta$. На основании сделанных предположений получаем для производных от этой функции следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{\gamma} &= \int_0^\infty u_x e^{-\gamma t} dt, \\ \frac{v_{xx}}{\gamma} &= \int_0^\infty u_{xx} e^{-\gamma t} dt. \end{aligned}$$

Из тех же условий вытекает, что существуют и лапласовы сопряженные функции u_t и u_{tt} . Прежде всего,

$$\int_0^T u_t(x, t) e^{-\gamma t} dt = u(x, T) e^{-\gamma T} - \varphi(x) + \gamma \int_0^T u(x, t) e^{-\gamma t} dt.$$

Из сходимости правой части, когда $T \rightarrow \infty$ при $\Re\gamma > \alpha_0$, вытекает сходимость левой части; следовательно,

$$\int_0^\infty u_t e^{-\gamma t} dt = v(x, \gamma) - \varphi(x).$$

Далее, из дифференциального уравнения $au_{tt} + bu_t = L [u]$ в гиперболическом случае, в силу того, что $a > 0$, вытекает также существование интеграла

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t} dt,$$

для которого аналогично предыдущему имеем:

$$\int_0^\infty u_{tt} e^{-\gamma t} dt = \gamma(v - \varphi) - \psi.$$

Помножив теперь дифференциальное уравнение (10) из § 1 на $e^{-\gamma t}$ и интегрируя по t от 0 до ∞ , получим для v неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma) \varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma) v,$$

которое, кстати, становится однородным, если в начальный момент было состояние покоя. Из краевых условий задачи I получаются аналогичным образом краевые условия для функции $v(x, \gamma)$:

$$v(0, \gamma) = \gamma \int_0^\infty f(t) e^{-\gamma t} dt,$$

$$\rho v_x = (\sigma - \lambda\gamma) v + \lambda\gamma\varphi(l) \quad (x = l).$$

Итак, для функции v независимой переменной x и комплексного параметра γ возникает следующая краевая задача обыкновенного дифференциального уравнения.

Задача II.

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma) \varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma) v, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v(0, \gamma) &= \gamma \int_0^\infty f(t) e^{-\gamma t} dt, \\ \rho v_x &= (\sigma - \lambda\gamma) v + \lambda\gamma\varphi(l) \quad (x = l). \end{aligned} \right\} \quad (7a) \quad \text{II}$$

При этом пусть $f(t)$ — кусочно-гладкая функция при $t \geq 0$ и и интеграл $\int_0^\infty f(t) e^{-\alpha t} dt$ — абсолютно сходящийся при $\alpha > \alpha_0$; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на отрезке $0 \leq x \leq l$.

Немедленно получаем следующее предложение: *Если задача II имеет однозначно определенное решение для всякого значения $\gamma = \alpha + i\beta$ с $\alpha > \alpha_0$, то существует самое большое одно решение соответствующей задачи I, удовлетворяющее требованиям (6).*

Действительно, так как при сделанных предположениях преобразование Лапласа однозначно обратимо, то двум различным решениям задачи I необходимо соответствовали бы также два различных решения задачи II.

Однако, еще важнее, чем это замечание, тот факт, что с помощью формул обращения Лапласа можно из решения задачи II получить решение задачи I. А именно, существует следующая теорема: *Пусть $v(x, \gamma)$ — решение задачи II, непрерывное в интервале $0 \leq x \leq l$ и имеющее в этом интервале непрерывные производные по x до второго порядка. Для всякого фиксированного значения x из этого интервала пусть функция $v(x, \gamma)$ регулярна всюду в полуплоскости $\Re\gamma > \alpha_0$ плоскости комплексной переменной γ . Пусть, далее, во всякой частичной полуплоскости $\Re\gamma \geq \alpha_0 + \delta$ (из которой в случае*

$x_0 < 0$ нулевая точка изъята с помощью сколь угодно малого фиксированного круга) и во всяком фиксированном частичном интервале $\varepsilon \leq x \leq l$ имеет место неравенство вида

$$\left| \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} \right| \leq \Phi(|\beta|), \quad (8)$$

причем $\int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho$ существует. Если интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \quad (9)$$

представляет функцию u , непрерывную в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, $t^2 + x^2 \geq \varepsilon$ (при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$) и имеющую непрерывные первые и вторые производные в области $0 < x \leq l$, $t \geq 0$, то функция u является решением соответствующей задачи I. При этом путь интегрирования L есть любая прямая, параллельная мнимой оси и целиком лежащая в полосе $\alpha > \alpha_0$, либо, в случае $\alpha_0 < 0$, «путь с обходом» вроде изображенного на черт. 10, § 2, п. 5¹⁾.

Для доказательства покажем сначала, что $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. При этом теперь, как и в дальнейшем, при проверке краевых и начальных условий мы будем пользоваться приемом, уже упомянутым в § 1, обеспечивающим возможность выполнения необходимых дифференцирований. Составляем сначала вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma. \quad (10)$$

Эту функцию, в силу предположения (8), можно в области $\varepsilon \leq x \leq l$, $t \geq 0$ дифференцировать дважды по времени t посредством дифференцирования под знаком интеграла. В частности,

$$w_{tt} = u(x, t).$$

С другой стороны, в силу дифференциального уравнения (7), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma$$

тоже равномерно сходится в области $\varepsilon \leq x \leq l$, $\varepsilon \leq t \leq T$. Отсюда можно вывести, что

$$L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{L[v]}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma \quad (2).$$

1) Задача: отождествить этот результат с выражением решения с помощью интеграла Дюамеля из § 1, п. 3.

2) Достаточно доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{pv_{xx} + qv_x}{\gamma^3} e^{\gamma t} d\gamma = pw_{xx} + qw_x.$$

Из всего этого вытекает равенство

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma^3} [(a\gamma^2 + b\gamma) v - L[v]] d\gamma$$

или, в силу дифференциального уравнения (7),

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma^3} [(a\gamma^2 + b\gamma) \varphi + a\gamma\psi] d\gamma,$$

откуда окончательно имеем:

$$aw_{tt} + bw_t - L[w] = a\varphi + (b\varphi + a\psi)t. \quad (11)$$

Дифференцируя два раза по t [что возможно, так как, согласно предположению, сама функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка], получим для u дифференциальное уравнение $au_{tt} + bu_t = L[u]$ и притом во всей области $0 < x \leq l$, $t > 0$.

Что функция u удовлетворяет в точке $x = 0$ краевому условию $u(0, t) = f(t)$, вытекает непосредственно из теоремы обращения и из предположенной непрерывности функции $u(x, t)$ при $t > 0$, $0 \leq x \leq l$.

В точке $x = l$ получаем сначала для вспомогательной функции w условие:

$$\begin{aligned} pw_x + \lambda w_t - aw &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma^3} [\rho v_x + (\lambda\gamma - \sigma)v] d\gamma = \\ &= \frac{\lambda\varphi(l)}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma^2} d\gamma = \lambda t\varphi(l), \end{aligned}$$

из которого двукратным дифференцированием по t находим:

$$pw_x + \lambda w_t - aw = 0.$$

Наконец, для проверки начальных условий сначала замечаем, что из соотношений

$$w(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v}{\gamma^3} d\gamma,$$

$$w_t(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v}{\gamma^2} d\gamma$$

или в силу того, что $p > 0$, доказать, что величина

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(Pv_x)_x}{\gamma^3} e^{it} d\gamma = (Pw_x)_x,$$

где $P(x) = e^{\int_0^x \frac{q}{p} dx}$.

Интегрированием интеграла для Ω , равномерно сходящегося для $\epsilon \leq x \leq l$, $t \geq \epsilon$, нетрудно получить соотношение

$$\int_{x'}^x \frac{dx'}{P(x')} \int_{x'}^x \Omega dx'' = w(x, t) - w(\epsilon, t) - A(t) \int_{x'}^x \frac{dx'}{P(x')},$$

где $A(t)$ не зависит от x . Дифференцирование этого равенства дает затем требуемый результат $\Omega = (Pw_x)_x$.

в силу предположения (8) вытекает, что как $w(x, 0)$, так и $w_t(x, 0)$ исчезают при $x > 0$. Действительно, имеем оценки

$$|w(x, 0)| \leq \frac{1}{\pi x^2} \int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho,$$

$$|w_t(x, 0)| \leq \frac{1}{\pi x} \int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho,$$

из которых при $\alpha \rightarrow \infty$ получается наше утверждение. Так как w и w_t , а также их производные до второго порядка, согласно предположениям, сделанным относительно функции $u(x, t)$, непрерывны области $0 < x \leq l$, $t > 0$, то при $t \rightarrow 0$ исчезают также $L[w]$ и $L[w_t]$. Следовательно, равенство (11) принимает вид

$$a[w_{tt}(x, 0) - \varphi(x)] = a[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнение (11), получаем при $t = 0$:

$$a(w_{ttt} - \psi) + b(w_{tt} - \varphi) = 0$$

или

$$a[u_t(x, 0) - \psi(x)] + b[u(x, 0) - \varphi(x)] = 0. \quad (13)$$

Отсюда получается в случае $a \neq 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

а в случае $a = 0$, $b \neq 0$:

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

и доказательство доведено до конца.

В заключение заметим, что на основании условия (8) имеем для u оценку:

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\pi} e^{\alpha t} \int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho,$$

справедливую для любого значения $\alpha \geq \alpha_0$. Отсюда следует при $t < 0$

$$u(x, t) \equiv 0, \quad (14)$$

а при $t > 0$

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\pi} e^{\alpha_0 t} \int_0^\infty \Phi(\rho) d\rho. \quad (15)$$

Это показывает, что и требование (6), поставленное нами с самого начала для функции u , действительно выполняется только что построенным решением.

3. Примеры. Уравнение теплопроводности и уравнение кабеля для конечных областей. 1. Уравнение теплопроводности. В качестве первого примера рассмотрим общее уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - ru \quad (r = \text{const.}), \quad (16)$$

в конечной основной области $0 \leq x \leq l$ при начальном условии

$$u(x, 0) = 0 \quad (16a)$$

и краевых условиях

$$u(0, t) = 1; \quad \rho u_x + \lambda u_t = \sigma u \quad (x = l). \quad (16b)$$

Согласно нашему общему правилу решаем сначала следующую задачу II обыкновенного дифференциального уравнения

$$v_{xx} = x^2 v \quad (x^2 = \gamma + r) \quad (17)$$

с краевыми условиями

$$v(0, \gamma) = 1; \quad \rho v_x = (\sigma - \lambda \gamma) v \quad (x = l). \quad (17a)$$

Это решение имеет вид

$$v(x, \gamma) = \frac{\rho x \operatorname{ch} \kappa(l-x) + (\lambda \gamma - \sigma) \operatorname{sh} \kappa(l-x)}{\rho x \operatorname{ch} \kappa l + (\lambda \gamma - \sigma) \operatorname{sh} \kappa l}. \quad (18)$$

Рассматриваемое как функция комплексного переменного $\gamma = \alpha + i\beta$, оно регулярно во всякой области полуплоскости $\Re \gamma > -r$, не содержащей нулей знаменателя

$$\rho x \operatorname{ch} \kappa l + (\lambda \gamma - \sigma) \operatorname{sh} \kappa l.$$

Но эти нули удовлетворяют уравнению

$$e^{2\gamma l} = \varepsilon(\gamma), \quad (19)$$

где

$$\varepsilon(\gamma) = \frac{\lambda \gamma^2 - \rho \gamma - (\lambda r + \sigma)}{\lambda \gamma^2 + \rho \gamma - (\lambda r + \sigma)},$$

и их вещественная часть при заданных, не исчезающих одновременно значениях λ , ρ , σ , не может превышать некоторой грани α_0 . Действительно, если бы, напротив, существовала бесконечная последовательность нулей $\gamma_n = \sqrt{x_n^2 - r}$, вещественная часть которых безгранично возрастала бы, то для этой последовательности левая часть уравнения (19) стремилась бы к бесконечности, правая же оставалась бы ограниченной.

Отсюда следует, что функция $v(x, \gamma)$ регулярна в некоторой полу平面 $\Re \gamma > \alpha_0$. На всякой прямой L , параллельной мнимой оси β и целиком расположенной в этой полуплоскости, для действительной части величины $x = \sqrt{\gamma + r}$ имеет место соотношение $\lim_{|\beta| \rightarrow \infty} \Re x - \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} = 0$.

Поэтому, приводя формулу (18) к виду

$$v(x, \gamma) = \frac{e^{-\kappa x} - \varepsilon(\gamma) e^{\kappa(x-2l)}}{1 - \varepsilon(\gamma) e^{-2\kappa l}}, \quad (20)$$

мы убеждаемся, что в интервале $0 < \delta \leq x \leq l$ выполняется неравенство

$$|v(x, \gamma)| \leq C_0 e^{-x} \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} \leq C_0 e^{-\delta} \sqrt{\frac{|\beta|}{2}}, \quad (21)$$

причем постоянная C_0 не зависит от x и от β . Отсюда немедленно вытекает, что $v(x, \gamma)$ удовлетворяет требованию (8) общей теоремы из п. 2. Аналогичные неравенства существуют и для производных функции v :

$$\left. \begin{aligned} |v_\alpha(x, \gamma)| &\leq C_1 |\beta| e^{-\delta \sqrt{\frac{|\beta|}{2}}}, \\ |v_{\alpha\alpha}(x, \gamma)| &\leq C_2 |\beta| e^{-\delta \sqrt{\frac{|\beta|}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (21a)$$

В силу неравенств (21) и (21a) интеграл

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L v(x, \gamma) \frac{e^{it}}{\gamma} d\gamma$$

представляет в области $0 < x \leq l$, $t \geq 0$ непрерывную функцию, имеющую непрерывные производные первого и второго порядка. Следовательно, если сумеем доказать еще и непрерывность функции $U(x, t)$ при приближении к любой точке $t > 0$ оси t , то согласно общему результату п. 1 функция

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\rho x \operatorname{ch} x(l-x) + (\lambda\gamma - \sigma) \sinh x(l-x)}{\rho x \operatorname{ch} xl + (\lambda\gamma - \sigma) \sinh xl} \frac{e^{it}}{\gamma} d\gamma \quad (22)$$

является искомым решением задачи (16).

Для этого доказательства непрерывности функции U записываем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\epsilon(\gamma) e^{-2\lambda l} (e^{-\gamma x} - e^{\gamma x})}{1 - \epsilon(\gamma) e^{-2\lambda l}} \frac{e^{it}}{\gamma} d\gamma + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-\gamma x} \sqrt{t+r} - e^{-\gamma x} \sqrt{t}}{\gamma} e^{it} d\gamma + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-\gamma x} \sqrt{t}}{e^{\gamma x} t} e^{it} d\gamma. \end{aligned}$$

Два первых интеграла — равномерно сходящиеся во всей области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$; из них второй — в силу выполняющегося на линии L неравенства

$$|e^{-\gamma x} \sqrt{t+r} - e^{-\gamma x} \sqrt{t}| = |e^{-\gamma x} \sqrt{t}| |e^{-\frac{x}{2} \sqrt{t+r+t}} - 1| \leq C \frac{xr}{\sqrt{|\gamma|}},$$

причем C не зависит ни от x , ни от γ ; оба интеграла сходятся вместе с x к нулю. Третий интеграл имеет [ср. § 2, формулы (34) и следующие] значение

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau,$$

и для значений $t > 0$ стремится к единице при $x \rightarrow 0$.

Введем в интеграл (22) вместо γ переменную интегриации $x = \sqrt{\gamma + i\tau}$: формула (22) примет тогда следующий вид:

$$U(x, t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\rho x \operatorname{ch} x(l-x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} x(l-x)}{\rho x \operatorname{ch} x l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} x l} \frac{2x}{x^2 - r} e^{xt} dx, \quad (23)$$

причем теперь путь интегрирования L' есть отображение прямой L на плоскость $x = \sigma + i\tau$, следовательно, равносторонняя гипербола:

$$\Re\gamma = \Re(x^2 - r) = \sigma^2 - \tau^2 - r = \text{const.} > \sigma_0.$$

Однако, на основании теоремы Коши, нетрудно убедиться, что и в плоскости x можно выбрать за путь интегрирования любую прямую, параллельную мнимой оси и оставляющую слева от себя все нули выражения

$$(x^2 - r)(\rho x \operatorname{ch} xl + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{sh} xl);$$

эту прямую мы опять будем обозначать через L .

Рассмотрим, в частности, краевые условия

$$u_x(l, t) = 0 \quad \text{и} \quad u(l, t) = 0 \quad (24)$$

соответственно. В первом случае $\varepsilon(x) = -1$, во втором случае $\varepsilon(x) = +1$. Заметим, что краевое условие $\lambda u_t = \sigma u$ при $x = l$ является при начальном условии $u(x, 0) = 0$ лишь по видимости более общим, чем условие $u(l, t) = 0$ ¹⁾. Мы будем рассматривать оба случая одновременно, полагая функцию $\varepsilon(x)$ постоянной, которой в окончательном результате припишем соответственно значения $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = +1$.

Чтобы упростить выражение для U , мы воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1 - \varepsilon e^{-2xl}} = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v e^{-2xvl},$$

сходящимся для всех значений x с положительной вещественной частью, в результате чего имеем:

$$v(x, \tau) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v e^{-x(x+2v)l} - \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v e^{x(x-2v)l} \quad (25)$$

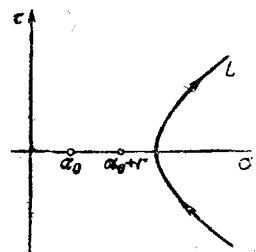
и

$$U(x, t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i} \int_L \left[\sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v e^{-x(x+2v)l} - \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v e^{x(x-2v)l} \right] \frac{2x}{x^2 - r} e^{xt} dx. \quad (26)$$

¹⁾ В самом деле, из дифференциального уравнения

$$\lambda \frac{du(l, t)}{dt} - \sigma u(l, t) = 0$$

начального условия $u(l, 0) = 0$ вытекает, что $u(l, t) \equiv 0$. (Прим. перев.)



Черт. 13.

В этом ряде можно при $t > 0$ поменять местами интеграцию и суммирование¹⁾. Дифференцируя затем в формуле (26) по t под знаком суммы и интеграла, получаем при $t \geq \delta > 0$ равномерно сходящийся ряд равномерно сходящихся интегралов, а, следовательно,

$$U_t(x, t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} e^v \int_L e^{-x(x+2vl)} 2xe^{xt} dx - \sum_{v=1}^{\infty} e^v \int_L e^{x(x-2vl)} 2xe^{xt} dx \right\}.$$

Если выбрать теперь за путь интегрирования L самое мнимую ось, то для U_t после несложных выкладок получится выражение

$$U_t = -\frac{e^{-rt}}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^v \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x+2vl)-vt} d\tau$$

или

$$U_t = -\frac{e^{-rt}}{\sqrt{\pi t}} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{-\infty}^{\infty} e^v e^{-\frac{(x+2vl)^2}{4t}} = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{4\pi t^3}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^v (x+2vl) e^{-\frac{(x+2vl)^2}{4t}}. \quad (27)$$

Так как $U(x, 0) = 0$, то само U получается, наконец, интегрированием формулы (27)

$$U(x, t) = \int_0^t U_\tau(x, \tau) d\tau.$$

Функцию

$$F(x, t; l) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^v e^{-\frac{(x+2vl)^2}{4t}}, \quad (28)$$

из которой $U(x, t)$ получается просто с помощью формулы

$$U(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t e^{-r\tau} F(x, \tau; l) d\tau, \quad (29)$$

можно выразить через эллиптическую ϑ -функцию

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{i\pi n^2 \tau}. \quad (30)$$

¹⁾ Действительно, обозначая через $v_n(x, v)$ n -ную частную сумму ряда (25) для $x = a + i\beta$, $a > 0$, имеем:

$$|v - v_n| \leq C e^{-2anl},$$

причем C не зависит ни от x , ни от x . Следовательно,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L (v - v_n) \frac{x}{x^2 - r} e^{xt} dx \right| \leq \frac{C}{2\pi} e^{-2anl} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x}{x^2 - r} \right| e^{(a^2 - \beta^2)t} d\beta,$$

при $t > 0$ стремится к нулю с безграничным возрастанием n .

Пусть сначала $\epsilon = 1$; в таком случае из выведенной на стр. 181 формулы преобразования (8) вытекает:

$$F(x, t; l) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{l}x} e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2}t}, \quad (31)$$

и, следовательно,

$$F(x, t; l) = \frac{1}{l} \vartheta\left(\frac{x}{2l}, i \frac{\pi}{l^2} t\right). \quad (32)$$

В случае $\epsilon = -1$ соответствующую функцию $F_1(x, t; l)$ легко выразить через F следующим образом:

$$F_1(x, t; l) = F(x, t; l) - 2F(x + 2l, t; 2l). \quad (33)$$

После несложных вычислений имеем:

$$F_1(x, t; l) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}x} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{l^2}t} \quad (34)$$

или

$$F_1(x, t; l) = \frac{1}{l} e^{i\frac{\pi}{2l}x - \frac{\pi^2}{l^2}t} \vartheta\left(\frac{1}{2l}(x + i\frac{\pi t}{l}); i\frac{\pi t}{l^2}\right). \quad (35)$$

Формулами (31) и (34) можно воспользоваться для того, чтобы получить другое выражение для функции U . Вносим эти ряды в формулу (29), и после интегрирования под знаком суммы, принимая во внимание справедливые в интервале $0 < x \leq l$ разложения в ряд Фурье¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{sh} l \sqrt{r}} &= \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^{\infty} \frac{n \sin \frac{\pi}{l} nx}{r + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}, \\ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{ch} l \sqrt{r}} &= \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{r + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

получим следующие выражения:

$$U(x, t) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{sh} l \sqrt{r}} - \frac{2\pi}{l^2} e^{-rt} \sum_0^{\infty} \frac{n \sin \frac{\pi}{l} nx}{r + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}} e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \quad (37)$$

для случая $U(l, t) = 0$ и

¹⁾ Первая из формул (36) получается при разложении функции $\operatorname{sh} \sqrt{r}(l-x)$ по синусам в интервале $0 < x \leq l$, вторая — при разложении функции $\operatorname{ch} \sqrt{r}(l-x)$ по синусам же в интервале $0 < x < 2l$. (Прим. пер.)

$$U(x, t) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{ch} l \sqrt{r}} - \frac{2\pi}{l^2} e^{-rt} \sum_0^{\infty} \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{r + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}} e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \quad (38)$$

для случая $U_x(l, t) = 0$.

Из этих формул видно, что при $t \rightarrow \infty$ устанавливается стационарное распределение соответственно

$$U = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{r}l} \quad \text{и} \quad U = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{r}(l-x)}{\operatorname{ch} \sqrt{r}l}. \quad (39)$$

Для интервала, простирающегося справа в бесконечность, из формул (37) или (38) получим выражение:

$$U = e^{-x \sqrt{r}} - \frac{2}{\pi} e^{-rt} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin x \xi}{r + \xi^2} e^{-\xi^2 t} d\xi \quad (40)$$

и, в частности, для случая $r = 0$

$$U = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \xi}{\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{3t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (41)$$

2. Волновое и телеграфное уравнения. В качестве второго примера рассмотрим *телеграфное уравнение*

$$u_{tt} = u_{xx} - r^2 u \quad (r = \text{const.}) \quad (42)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad (42a)$$

и краевыми условиями¹⁾

$$u(0, t) = \frac{t^8}{3!}; \quad \rho u_x + \lambda u_t = \sigma u \quad \text{при } x = l. \quad (42b)$$

Соответствующая задача II формулируется так:

$$v_{xx} = x^8 v, \quad (43)$$

$$v(0, \gamma) = \frac{1}{\gamma^8}; \quad \rho v_x + (\sigma - \lambda \gamma) v \quad \text{при } x = l, \quad (43a) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \text{II}$$

причем мы здесь положили

$$x^2 = \gamma^2 + r^2.$$

¹⁾ Мы строим здесь вместо импульсивной функции $U(x, t)$ функцию $U_0(x, t)$ (ср. § 1, п. 3) для того, чтобы на основании теоремы п. 2 заранее иметь гарантированно, что надлежащий интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma - i} e^{\gamma t} d\gamma$$

представляет искомое решение. Предположения упомянутой теоремы не выполнялись бы для интеграла, соответствующего функции $U(x, t)$. Впоследствии же можно будет из функции U_0 получить U по формуле

$$U(x, t) = \frac{\partial^8 U_0(x, t)}{\partial t^8}.$$

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v(x, \gamma) &= \frac{\rho x \operatorname{ch} \gamma(l-x) + (\lambda \gamma - \sigma) \operatorname{sh} \gamma(l-x)}{\rho r \operatorname{ch} \gamma l + (\lambda \gamma - \sigma) \operatorname{sh} \gamma l} \frac{1}{\gamma^3} = \\ &= \frac{e^{-x \gamma} - \varepsilon(x) e^{\gamma(x-2l)}}{1 - \varepsilon(x) e^{-2 \gamma l}} \frac{1}{\gamma^3}, \end{aligned} \quad (44)$$

где теперь

$$\varepsilon(x) = \frac{\lambda \sqrt{x^2 - r^2} - \rho x - \sigma}{\lambda \sqrt{x^2 - r^2} + \rho x - \sigma}. \quad (45)$$

Так же, как и раньше, убеждаемся, что существует такое число $\alpha_0 > 0$, что знаменатель формулы (44) уже не имеет нулей в полу-плоскости $\Re \gamma > \alpha_0$, и, следовательно, функция v в этой полуплоскости всюду регулярна. На всякой прямой L , параллельной мнимой оси и лежащей в полуплоскости $\Re \gamma \geq \alpha_0 + \delta$, имеем:

$$\left| \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} \right| \leq \frac{A}{(B + |\beta|)^4},$$

где $A > 0$ и $B > 0$ — постоянные, не зависящие от x и γ . Отсюда и из соответствующих оценок для $\frac{v_x}{\gamma}$ и $\frac{v_{xx}}{\gamma}$ нетрудно заключить, что выражение

$$U_3(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma} e^{it} d\gamma \quad (46)$$

представляет функцию, непрерывную в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ и имеющую в этой области непрерывные производные первого и второго порядка. Следовательно, эта функция является решением задачи (42).

Рассмотрим и для этой задачи частные случаи¹⁾:

$$\left. \begin{array}{ll} u_x(l, t) = 0; & \varepsilon(x) = -1, \\ u(l, t) = 0; & \varepsilon(x) = +1; \end{array} \right\} \quad (47)$$

как и в предшествующей задаче разложим функцию v в ряд

$$v(x, \gamma) = \left(\sum_0^\infty s^x e^{-x(x+2\gamma l)} - \sum_1^\infty s^x e^x(x-2\gamma l) \right) \frac{1}{\gamma^3} \quad (48)$$

и подставим этот ряд в формулу (46). Непосредственно убеждаемся, что почленное интегрирование допустимо, и в результате этого интегрирования получается ряд вида

$$U_3(x, t) = S(x, t) + \sum_1^\infty s^x [S(2\gamma l + x, t) - S(2\gamma l - x, t)], \quad (49)$$

¹⁾ Другим важным случаем является $\varepsilon = 0$, который может быть, конечно, реализован лишь при $r = 0$, если еще $\sigma = 0$ и $\lambda = \rho$. В этом случае не возникает «отраженных» волн.

где $S(x, t)$ определяется как интеграл

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{-x\sqrt{\gamma^2 + r^2} + \gamma t} \cdot \frac{d\gamma}{\gamma^4}. \quad (50)$$

В случае $r = 0$ имеем:

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\gamma(t-x)} \frac{d\gamma}{\gamma^4},$$

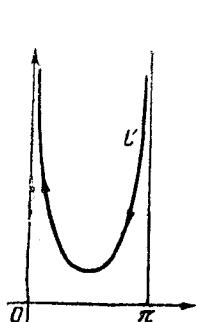
и, следовательно, сразу получается:

$$S(x, t) = S(t - x) = \begin{cases} \frac{(t-x)^3}{3!} & \text{при } t > x, \\ 0 & \text{при } t < x, \end{cases} \quad (51)$$

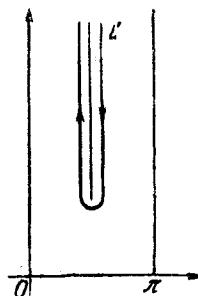
откуда окончательно имеем:

$$U_3(x, t) = S(t - x) + \sum_1^\infty e^y [S(t - x - 2yl) - S(t + x - 2yl)] \quad (52)$$

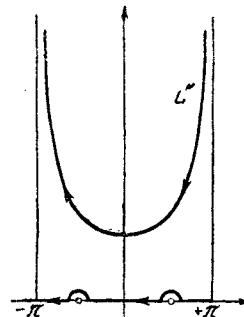
в согласии с результатами, полученными ранее в § 1, п. 1, для которых только что решенная задача представляет частный случай $f(t) = \frac{t^3}{3!}$, $t > 0$. Так как в ряде (52) во всякий момент времени лишь конечное число членов не исчезает тождественно и каждый из этих членов обладает непрерывными производными до второго порядка и кусочно-



Черт. 14.



Черт. 15.



Черт. 16.

непрерывными производными третьего порядка, то дифференцированием получаем непосредственно функцию U для случая $r = 0$, а именно:

$$U(x, t) = \eta(t - x) + \sum_{y=1}^\infty e^y [\eta(t - x - 2yl) - \eta(t + x - 2yl)],$$

где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла (50) в случае $r \neq 0$ вводим вместо γ в качестве переменной интегрирования величину $\varphi = \sigma + it$ с помощью равенства

$$\gamma = ir \cos \varphi,$$

после чего выражение для S примет вид

$$S(x, t) = -\frac{1}{2\pi r^3} \int_{L'} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi. \quad (53)$$

При этом L' есть кривая, являющаяся отображением прямой L на плоскость φ , т. е. кривая

$$\Re(ir \cos \varphi) = \text{const.} > \alpha_0,$$

изображенная на черт. 14. Если $t < x$, то действительная часть показателя

$$ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi),$$

т. е. выражение

$$r \sin \sigma(t \operatorname{sh} \tau - x \operatorname{ch} \tau) \quad (54)$$

в бесконечной части области $0 < \sigma < \pi$, $\tau > 0$ становится отрицательно бесконечным, так что путь L' можно деформировать в дважды пробегаемую полупрямую (ср. черт. 15) в этой области. Отсюда вытекает, что

$$S(x, t) \equiv 0 \quad (t < x). \quad (55)$$

Если же $t > x$, то выражение (54) становится отрицательно бесконечным в бесконечной части области $-\pi < \sigma < 0$, $\tau > 0$, и путь L можно деформировать в кривую L'' , окаймляющую всю полосу $-\pi < \sigma < \pi$ (ср. черт. 16). Вследствие периодичности подинтегрального выражения в формуле (53) можно написать:

$$S(x, t) = \frac{1}{2\pi r^3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi, \quad (56)$$

причем точки $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ следует обходить по полуокружности малого радиуса, обращенной выпуклостью вверх.

Достаточно будет вычислить функцию

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi r^4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi}, \quad (57)$$

из которой можно будет получить S по формуле

$$S = -\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Но для четвертой производной по t от функции $f(x, t)$ имеем:

$$\frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial t^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix \sin \varphi + t \cos \varphi)} d\varphi = J_0(r \sqrt{t^2 - x^2}). \quad (57a)$$

При $t = x$ исчезают как функция $f(x, t)$, так и ее производные по t до третьего порядка. Действительно, если подставить в формулу (57) $t = x$ и в качестве переменной интегрирования ввести величину $z = e^{i\varphi}$, то получим:

$$f(x, x) = -\frac{8i}{\pi r^4} \oint \frac{z^3}{(1+z^2)^4} e^{irxz} dz,$$

причем за путь интегрирования следует принять единичную окружность плоскости z и точки $z = \pm i$ надо обходить с внутренней стороны. Получаем, очевидно, $f(x, x) = 0$; аналогично можно показать, что при $t = x$ обращаются в нуль и производные по t до третьего порядка. Ввиду этого из формулы (57а) вытекает:

$$f(x, t) = \frac{1}{3!} \int_x^t (t-\tau)^3 J_0(r\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau,$$

и следовательно, окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} S(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_x^t \frac{(t-\tau)^3}{3!} J_0(r\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau, \quad t > x, \\ S(x, t) &= 0, \quad t < x. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

В частном случае $r = 0$ получается, естественно, снова прежний результат:

$$S(x, t) = \frac{(t-x)^3}{3!}, \quad t > x,$$

$$S(x, t) = 0, \quad t < x.$$

В силу формулы (58), ряд (49) и в случае $r \neq 0$ содержит лишь конечное число неисчезающих тождественно членов, каждый из которых имеет непрерывные производные до второго порядка и кусочно-непрерывные производные третьего порядка. Следовательно, для импульсивной функции $U = \frac{\partial^3 U_3}{\partial t^3}$ получается дифференцированием следующее выражение:

$$U(x, t) = S(x, t) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu [S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)], \quad (59)$$

причем теперь

$$S(x, t) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \int_x^t J_0(r\sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau, & t > x, \\ 0, & t < x. \end{cases} \quad (59a)$$

Эта функция $U(x, t)$ является решением задачи (42) при краевом условии $U(0, t) = 1$.

Для функции $U(x, t)$ легко получить еще другое выражение, представляющее аналогию разложениям (37) и (38) примера 1. Правда,

при этом выводе мы отказываемся от обоснования изменений порядка предельных переходов. Мы будем исходить из интегралов

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{ch} x(l-x)}{\operatorname{ch} xl} \frac{e^{it}}{\gamma} d\gamma \text{ в случае } U_x(l, t) = 0$$

и соответственно

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{sh} x(l-x)}{\operatorname{sh} xl} \frac{e^{it}}{\gamma} d\gamma \text{ в случае } U(l, t) = 0$$

и воспользуемся разложениями в ряд Фурье

$$\frac{\operatorname{sh} x(l-x)}{\operatorname{sh} xl} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^\infty \frac{n \sin \frac{\pi}{l} nx}{x^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}$$

и

$$\frac{\operatorname{ch} x(l-x)}{\operatorname{ch} xl} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^\infty \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{x^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}},$$

справедливыми в интервале $0 < x \leq l$. Внесем эти ряды в упомянутые выше исходные интегралы и будем интегрировать почленно. В силу равенства $x^2 = \gamma^2 + r^2$ каждый член ряда даст интеграл типа

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma(\gamma^2 + r^2 + m^2)} d\gamma.$$

Воспользовавшись разложением на элементарные дроби:

$$\frac{1}{\gamma(\gamma^2 + r^2 + m^2)} = \frac{1}{m^2 + r^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma + i\sqrt{m^2 + r^2}} + \frac{1}{\gamma - i\sqrt{m^2 + r^2}} \right) \right),$$

получим без затруднений:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{it}}{\gamma(\gamma^2 + m^2 + r^2)} d\gamma = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{m^2 + r^2}}{m^2 + r^2},$$

а, следовательно, и нижеследующие ряды для наших функций:

$$U(x, t) = \left. \begin{aligned} &= \frac{4\pi}{l^2} \sum_0^\infty \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{r^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{r^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \\ &\quad \end{aligned} \right\} (60)$$

и соответственно

$$U(x, t) = \left. \begin{aligned} &= \frac{4\pi}{l^2} \sum_1^\infty \frac{n \sin \frac{\pi}{l} nx}{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{r^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}. \\ &\quad \end{aligned} \right\}$$

В пределе $l \rightarrow \infty$ отсюда получаются интегралы

$$U_1 = U_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \sin x\xi}{r^2 + \xi^2} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{r^2 + \xi^2} d\xi. \quad (61)$$

В случае $r = 0$ ряды (60) принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{l} \left(n + \frac{1}{2} \right) x \sin^2 \frac{\pi}{2l} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}}, \\ U(x, t) &= \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin \frac{\pi}{l} nx \sin^2 \frac{\pi}{2l} nt}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Второй из рядов (62) можно, впрочем, выразить с помощью первого полинома Бернулли

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi nt}{n} \quad (0 < t < 1)$$

в следующем виде:

$$U(x, t) = B_1\left(\frac{x+t}{2l}\right) + B_1\left(\frac{x-t}{2l}\right) - 2B_1\left(\frac{x}{2l}\right). \quad (62a)$$

Предоставим читателю показать, что эти последние формулы (62) и (62a) совпадают с результатами, полученными в § 1, п. 1.

Связь между формулой (59) и рядами (60) устанавливается, как и в примере уравнения теплопроводности, с помощью формулы суммирования Пуассона (т. I, стр. 70). Обозначим через $G(x, t)$ функцию

$$G(x, t) = \begin{cases} 0, & t^2 < x^2, \\ J_0(r \sqrt{t^2 - x^2}), & t^2 > x^2. \end{cases} \quad (63)$$

С помощью этой функции можно выражение (59) привести к виду

$$U(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \sum_{v=-\infty}^{\infty} G(x + 2vt, \tau) d\tau, \quad (64)$$

представляющему аналогию выражению (29) в случае уравнения теплопроводности. Для функции

$$F(x, t; l) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} G(x + 2vl, t), \quad (64a)$$

как показывает сравнение с рядом (60), должна иметь место формула преобразования

$$\begin{aligned} F &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} G(x + 2vl, t) = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i n \frac{\pi}{l} x}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}} \sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}, \end{aligned} \quad (65)$$

но эта формула вытекает непосредственно из формулы суммирования Пуассона, если воспользоваться интегральной формулой

$$\int_{-t}^t J_0(r \sqrt{t^2 - x^2}) e^{-in \frac{\pi}{l} x} dx = \frac{2 \sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}, \quad (66)$$

из теории бесселевых функций.

В частности, при $x=0$ имеем:

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} G(2vt, t) = \frac{1}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}. \quad (67)$$

При всяком t левая часть (67) содержит лишь конечное число не исчезающих членов. Следовательно, стоящий справа бесконечный ряд выражается в виде конечной суммы бесселевых функций. Например, в интервале $0 < t < 2l$

$$J_0(rt) = \frac{1}{l} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}};$$

в пределе $l \rightarrow \infty$ отсюда получается:

$$J_0(rt) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t \sqrt{r^2 + \pi^2 \zeta^2}}{\sqrt{r^2 + \pi^2 \zeta^2}} d\zeta.$$

Литература к дополнениям к главе III

Монографии:

Jeffreys, Operational Methods in Math. Phys., серия Cambridge Tracts, Nr. 23.

Carson, Electrical Circuit Theory, New York, 1926, с обильными ссылками на обширную литературу. Либо немецкий перевод, переработанный и дополненный Оллендорфом и Польгаузеном: Сагзоп, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, Berlin, 1929. Имеется русский перевод немецкой переработки книги Карсона под названием: Карсон Д. Р., Электрические нестационарные явления и операционное исчисление, ДНТВУ, Харьков — Киев, 1934.

Эфрос А. М. и Данилевский А. М., Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937.

Лурье А. И., Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, Л.-М., 1938.

Статьи, подчеркивающие математическую точку зрения:

Plancherel, Atti del Congresso Intern. Bologna, 1928.

Mächler W., Comm. math. Helvet., т. 5, стр. 256 и следующие.

v. Koppelfeis, Math. Ann., т. 105, стр. 694 и следующие.