Таким образом, мы получаем:

$$|K_x| \leqslant \frac{1}{\pi r}$$

и точно так же

$$|K_y| \leqslant \frac{1}{\pi r}.$$

Итак, функция Грина для единичного круга удовлетворяет внутри круга условию (19). Вообще можно доказать, что условие (19) выполняется для любой области G, *граница которой имеет всюду непрерывную кривизну* [1]).

Другой способ построения теории эллиптических дифференциальных уравнений дают *прямые методы вариационного исчисления*, как нами будет показано в гл. VII, однако, эти методы применимы только к тем дифференциальным уравнениям, к которым приводят вариационные задачи, т. е. только к *самосопряженным* дифференциальным уравнениям вида

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu = 0. \tag{20}$$

Методы, бегло изложенные в этом параграфе, обладают прежде всего тем преимуществом, что они не связаны с этим ограничением и дают возможность распространить теорию также и на любые не самосопряженные уравнения, получающиеся путем присоединения к левой части уравнения (20) каких угодно членов первого порядка.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Обобщение краевой задачи. Теоремы Винера. Несмотря на то, что в случае трех или большего числа измерений краевая задача в строгом смысла слова, т. е. в смысле действительного достижения краевых значений, для произвольной ограниченной области является в общем случае неразрешимой, мы можем, однако, сделать задачу всегда разрешимой, если обобщим постановку вопроса и будем рассматривать с более глубокой точки зрения связь, существующую между заданной краевой функцией и искомой гармонической функцией.

Будем смотреть на краевую задачу, как на задачу сопоставления заданной на границе Γ непрерывной краевой функции f некоторой гармонической внутри G функции u.

Возможность такого сопоставления, не требующего обязательно непрерывного примыкания на границе значений функции u к значе-

---

[1]) См. обзорную статью Лихтенштейна в энциклопедии математических наук, т. II, 3, вып. 8. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

ниям функции f, получается на основании следующей теоремы *предельного перехода*, принадлежащей Винеру [1]).

Обозначим через G некоторую ограниченную область m-мерного пространства, через Γ — граничную поверхность области G и пусть в области $G+\Gamma$ задана некоторая непрерывная функция $f(P)$. Рассмотрим последовательность областей G_n с границами Γ_n, сходящуюся к области G, для которых краевая задача разрешима, причем каждая область G_n является подобластью G_{n+1}. Тогда последовательность решений u_n соответствующих краевых задач:

$$\Delta u_n = 0 \text{ в } G_n \text{ и } u_n = f \text{ на } \Gamma_n$$

сходится равномерно во всякой замкнутой подобласти G' области G к некоторой гармонической функции u. Эта предельная функция не зависит ни от выбора специальной аппроксимирующей последовательности G_n, ни от значений функции $f(P)$ внутри области G.

Совершенно аналогичный результат имеет место для соответствующей *внешней краевой задачи* и, в частности, для специального случая, когда $u=1$ на Γ, причем требуется найти потенциал электрического заряда, распределенного на Γ. В случае поверхности Γ произвольного, сколь угодно общего вида нельзя ожидать, что соответствующее распределение зарядов на Γ может быть описано с помощью некоторой поверхностной плотности; поэтому искомый потенциал вне области G в случае произвольной поверхности Γ не может быть, вообще говоря, представлен в виде обычного потенциала поверхностного распределения зарядов.

Однако, Винер показал, что введение *интеграла Стильтьеса* делает возможным представить искомый потенциал в интегральной форме.

Соответствующая теорема Винера формулируется так:

Пусть $u(P)$ — гармоническая вне G функция, сопоставленная краевым значениям $u=1$. Тогда существует такая функция $M(P)$, возрастающая по каждой из координат $x_1, \ldots, x_n$, что всюду вне G имеет место интегральная формула

$$u(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{dM(P)}{r}. \tag{1}$$

Функция $M(P)$ характеризует распределение зарядов. Полный заряд

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int dM(P)$$

---

[1]) Wiener N., Certain Notions in Potential Theory, *J. Math. Physics*, т. 3 (1924), стр. 24—51; The Dirichlet Problem, *J. Math. Physics*, т. 3 (1924), стр. 127—147.

выражает *емкость* области G. Гармоническая функция u, сопоставленная таким способом краевой функции $f(P)$, может при приближении к точке границы P и не стремиться к предельному значению $f(P)$. Мы в этом случае говорим, что P является *неправильной* граничной точкой. *Правильной же* или *регулярной* точкой границы называется такая точка P границы, что при любом способе приближения точки P_ν к P изнутри области и при любой непрерывной краевой функции f имеет место условие

$$u(P_\nu) \to f(P).$$

Из рассмотрений § 4, п. 1 получается следующий достаточный признак регулярности граничной точки: граничная точка P является регулярной, если в P можно построить тетраэдр с вершиной в точке P, внутренность которого целиком лежит вне области G.

Необходимый и достаточный признак регулярности дается в следующей теореме Винера: *Пусть λ — положительное число, меньшее единицы, а γ_n — емкость множества всех точек, не принадлежащих области G и заключенных между двумя сферами, описанными из точки P радиусами λ^n и λ^{n-1}, т. е. точек Q, не принадлежащих G и удовлетворяющих условию*

$$\lambda^n \leqslant \overline{PQ} \leqslant \lambda^{n-1}. \tag{2}$$

Тогда точка P регулярна или нерегулярна в зависимости от того, расходится или сходится ряд

$$\sum_1^\infty \frac{\gamma_\nu}{\lambda^\nu}. \tag{3}$$

2. Нелинейные дифференциальные уравнения. а) Встречающаяся в ряде математических и физических вопросов краевая задача дифференциального уравнения

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = e^u \tag{4}$$

с краевым условием

$$u = f \text{ на } \Gamma$$

может быть решена следующим образом[1]). Пусть $w(x, y)$ — решение краевой задачи: $\Delta w = 0$, $w = f$ на Γ. Тогда функция $v = u - w$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta v - e^w v = e^w (e^v - v) \tag{5}$$

и принимает на границе Γ краевые значения $v = 0$. Обозначим через $K(x, y; \xi, \eta)$ функцию Грина уравнения $\Delta v - e^w v = 0$ для области G. Эта функция нигде не отрицательна в G.

Тогда мы получим для v следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$v = -\iint\limits_G K(x, y; \xi, \eta)\, e^w (e^v - v)\, d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

---

[1]) См. Бибербах, *Göttinger Nachr.*, 1912, стр. 599—602.

Интегральное уравнение (6) можно решить с помощью последовательных приближений вида

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1} &= -\iint\limits_G K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, e^{w}\,(e^{v_n} - v_n)\, d\xi\, d\eta, \\ v_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Предельная функция последовательности v_n существует и является решением интегрального уравнения (6), если только область G достаточно мала.

В самом деле, так как $K \geqslant 0$ и $v_1 = -\iint Ke^{w}\, d\xi\, d\eta = -S < 0$, то отсюда следует путем индукции, что $v_n < 0$; ибо, если $v_{n-1} < 0$, то $e^{v_{n-1}} - v_{n-1} > 0$, откуда и следует на основании уравнения (7), что и $v_n < 0$. Путем такой же индукции мы получим, принимая во внимание неравенство $v_1 - v_0 < 0$ и соотношение

$$v_{n+1} - v_n = -\iint\limits_G Ke^{w}\,[v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}}\,(e^{v_n - v_{n-1}} - 1)]\, d\xi\, d\eta, \qquad (7')$$

что для всех значений n имеет место неравенство

$$v_{n+1} - v_n < 0.$$

Действительно, пусть $v_n - v_{n-1} < 0$. Из неравенства

$$1 - e^{v_n - v_{n-1}} < v_{n-1} - v_n$$

следует

$$v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}}\,(e^{v_n - v_{n-1}} - 1) > (v_{n-1} - v_n)\,(1 - e^{v_{n-1}}).$$

Так как $v_{n-1} < 0$ и $v_{n-1} - v_n > 0$, то правая часть предыдущего неравенства положительна.

Из формулы (7′) следует поэтому, что $v_{n+1} - v_n < 0$. В силу того, что $e^{v_n - v_{n-1}} < 1$, мы получаем теперь из той же формулы (7′) неравенство

$$v_n - v_{n+1} < \iint\limits_G Ke^{w}\,(v_{n-1} - v_n)\, d\xi\, d\eta.$$

Если мы обозначим через M_n максимум $v_n - v_{n+1}$, а через S_0 — максимум S в $G + \Gamma$, то M_n удовлетворяет неравенству $M_n \leqslant \leqslant M_{n-1} S_0$.

Таким образом, мы получаем неравенство

$$0 < v_n - v_{n+1} \leqslant M_0 S_0^n \leqslant S_0^{n+1}.$$

Если выполняется условие $S = \iint\limits_G Ke^{w}\, d\xi\, d\eta < 1$, то из предыдущего следует, что последовательность v_n равномерно сходится в области $G + \Gamma$. Поэтому предельная функция удовлетворяет интегральному уравнению (6), а, следовательно, и дифференциальному уравнению (4), принимая при этом нулевые краевые значения.

б) Аналогичным путем может быть в общем виде доказана разрешимость краевой задачи для дифференциального уравнения

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{8}$$

при условии, что *область G достаточно мала*. Очевидно, что достаточно доказать эту теорему для случая нулевых краевых значений. Пусть f — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция от своих пяти аргументов. Обозначим через $K(x, y; \xi, \eta)$ функцию Грина уравнения $\Delta u = 0$. Составим последовательность функций $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ с помощью рекуррентной формулы

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= -\iint\limits_G K(x, y; \xi, \eta) f\left(\xi, \eta, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta, \\ u_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Пусть, далее, μ и L — два положительных числа таких, что если v удовлетворяет неравенствам

$$|v| \leqslant L, \ |v_x| \leqslant L, \ |v_y| \leqslant L, \text{ то } |f(x, y, v, v_x, v_y)| \leqslant \mu.$$

Если эти неравенства имеют место для функции u_n, то из формулы (9) следует, что функция u_{n+1} удовлетворяет неравенствам

$$|u_{n+1}| \leqslant a\mu; \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right| \leqslant a\mu; \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right| \leqslant a\mu,$$

где a обозначает максимум выражений

$$\iint\limits_G K\, d\xi\, d\eta, \qquad \iint\limits_G |K_x|\, d\xi\, d\eta, \qquad \iint\limits_G |K_y|\, d\xi\, d\eta$$

в области G. Очевидно, что a стремится к нулю при стремлении к нулю площади области G. Выберем G настолько малой по площади, чтобы выполнялось условие $a \leqslant \frac{L}{\mu}$.

Тогда имеют место неравенства

$$|u_{n+1}| \leqslant L, \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right| \leqslant L, \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right| \leqslant L.$$

Так как эти неравенства выполняются для начальной функции $u_0 = 0$, то из предыдущего следует, что они имеют место для всех функций u_n. Если мы положим, далее,

$$D_n(x, y) = |u_{n+1} - u_n| + \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\right|,$$

то из формулы (9) легко получается соотношение вида

$$D_{n+1}(x, y) \leqslant \iint\limits_G K^*(x, y; \xi, \eta) D_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{10}$$

где K^* обозначает некоторую положительную функцию, интеграл которой

$$\iint\limits_G K^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

стремится к нулю вместе с площадью области G. При достаточно малой области G имеет поэтому место неравенство

$$\iint\limits_G K^* \, d\xi \, d\eta \leqslant S < 1,$$

откуда следует

$$M_n < M_0 S^n, \tag{11}$$

где M_n обозначает максимум выражения D_n в области G. Этим доказана равномерная сходимость функций u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ в области G. Предельная функция u удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, y) = -\iint K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \, d\xi \, d\eta. \tag{12}$$

Совершенно аналогичным путем доказывается сходимость вторых производных

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2},$$

и тогда из интегрального уравнения (12) следует, что u удовлетворяет дифференциальному уравнению (8), принимая при этом на Γ краевые значения $u = 0$.

в) Для общего нелинейного дифференциального уравнения вида

$$N[u] = F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \tag{13}$$

где F обозначает некоторую непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию от своих восьми аргументов в некоторой заданной восьмимерной области, мы можем формулировать краевую задачу следующим образом. Допустим, что существует решение $u(x, y)$ уравнения (13), для которого это уравнение эллиптично, т. е. квадратичная форма

$$\frac{\partial F}{\partial r} \xi^2 + \frac{\partial F}{\partial s} \xi\eta + \frac{\partial F}{\partial t} \eta^2$$

при замене u через $u(x, y)$ является определенной положительной формой во всей области G. Не ограничивая общности, мы можем считать рассматриваемое решение уравнения (13) тождественно равным нулю. Полагая

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_{u \equiv 0}; \qquad B = \frac{1}{2} \left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{u \equiv 0}; \qquad C = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{u \equiv 0}, \tag{14}$$

мы допускаем, таким образом, что квадратичная форма

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$$

является во всей области G определенной положительной формой.

Требуется узнать, существует ли при достаточно малом ε *решение уравнения* (13), *принимающее на границе* Γ *краевые значения* $u = \varepsilon\varphi(x, y)$, *где* $\varphi(x, y)$ — *произвольная непрерывная в* $G + \Gamma$ *функция.*

Чтобы решить этот вопрос, применяют следующий *метод последовательных приближений*. Положим:

$$a = \frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{u \equiv 0}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial q}\Big|_{u \equiv 0}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u \equiv 0} \tag{15}$$

и с помощью коэффициентов (14) и (15) образуем следующее линейное эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L_0[u] = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{16}$$

(*дифференциальное уравнение Якоби*).

Мы предполагаем, что существует решение $u_0(x, y)$ уравнения $L_0[u] = 0$, принимающее на Г краевые значения $u_0 = \varepsilon\varphi$. С помощью u_0 мы определяем коэффициенты

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial F}{\partial r}\Big|_{u \equiv u_0}; \quad B_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial s}\Big|_{u \equiv u_0}; \quad C_1 = \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{u \equiv u_0}, \\ a_1 &= \frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{u \equiv u_0}; \quad b_1 = \frac{\partial F}{\partial q}\Big|_{u \equiv u_0}; \quad c_1 = \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u \equiv u_0} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и ищем обращающееся в нуль на границе Г решение w_1 неоднородного дифференциального уравнения

$$L_1[u] = A_1u_{xx} + 2B_1u_{xy} + C_1u_{yy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u = N[u_0]. \tag{18}$$

Полагая теперь $u_1 = u_0 + w_1$, мы таким же образом образуем с помощью u_1 коэффициенты $A_2, \ldots, c_2$ и находим решение w_2 уравнения $L_2[u] = N[u_1]$, имеющее краевые значения $w_2 = 0$ на границе Г. Полагая $u_2 = u_1 + w_2$, мы снова повторяем этот процесс и продолжаем его неограниченное число раз.

Путем выбора достаточно малого ε мы можем добиться, чтобы при неограниченном продолжении этого процесса всегда получались разрешимые линейные краевые задачи и чтобы последовательность соответствующих функций u_n сходилась к предельной функции u, удовлетворяющей уравнению (13) и краевому условию $u = \varepsilon\varphi$ [1]).

Литература к главе IV (курсы)

Picard, Traité d'analyse, Париж.
Poincaré. Potentiel Newtonien, Париж.
Kellog, Potential Theory (Собрание математических монографий: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, т. 21).
Гурса, Курс математического анализа, т. 2 и 3.
Горн, Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными, М.—Л., 1938.

---

[1]) При допущении, что F — аналитическая функция от своих аргументов, а Г — аналитическая кривая, доказательство проводится у Жиро: Giraud, Sur le problème de Dirichlet, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, т. 43 (1926), стр. 1—128.