где ради краткости положено $r_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$, а многоточиями обозначены производные порядков ниже n.

Мы раньше назвали вполне гиперболической интегральной полоской n-го порядка такую начальную интегральную полоску n-го порядка, для которой алгебраическое уравнение n-ой степени относительно ρ

$$F_{r_n}\rho^n - F_{r_{n-1}}\rho^{n-1} + \ldots = 0 \tag{20}$$

имеет n различных вещественных корней (см. стр. 342).

В этом случае изложенная выше теория сохраняет силу. Не останавливаясь здесь на доказательстве, ограничимся ссылкой на имеющуюся литературу[1]).

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

§ 1. Введение комплексных величин. Переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью комплексных переменных

Рассмотрения гл. V, § 6, п. 2 остаются в силе почти без изменений и в том случае, когда функция f или коэффициенты $a_{\nu\mu}$ являются комплексными функциями от вещественных независимых переменных x и y. Мы должны тогда и решения $u = u_1 + iu_2$ также расщепить на вещественную и мнимую часть, что дает нам вместо n или N уравнений с комплексными коэффициентами в два раза большее число вещественных уравнений того же типа для функций u_1 и u_2.

При этом остаются в силе теория интегрирования, теоремы о единственности, а также все наши результаты относительно непрерывной и дифференцируемой зависимости решений от параметров.

Если в дифференциальном уравнении $F(x, y, u, \ldots) = 0$ левая часть является аналитической функцией от всех своих аргументов и если, кроме того, известно, что решение $u(x, y)$ зависит аналитически от x и y, то дифференциальное уравнение и его решение могут быть аналитически продолжены на комплексную область, и мы можем рассматривать переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$ как комплексные переменные. При этом исчезает различие между типами дифференциальных уравнений, существенно связанное с вещественностью независимых переменных, и становится принципиально возможным переход от эллиптического типа к гиперболическому.

Простейший и вместе с тем важнейший пример этого дает дифференциальное уравнение

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

эллиптическое в вещественной области. Допустим, что правая часть является аналитической функцией от своих пяти аргументов. Если предположить, сверх того, что решение u зависит аналитически от x

---

[1]) Фридрихс и Леви, *Math. Ann.*, т. 99.

и y, то мы можем рассматривать u как функцию комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ или же как комплексную функцию четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Наше дифференциальное уравнение выражает первоначально в вещественной области, что

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

Но в комплексной области мы можем дифференцирование по y_1 заменить дифференцированием по iy_2; поэтому комплексная аналитическая функция u как функция от четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -iu_{y_2}), \tag{3}$$

имеющему формально гиперболический характер. Мы видим, таким образом, что право на такое преобразование уравнения эллиптического типа в уравнение гиперболического типа нам дает аналитический характер решения u, т. е. то обстоятельство, что производная функции по комплексному переменному не зависит от направления дифференцирования.

Мы можем теперь обратить этот ход рассуждения следующим образом: будем исходить из некоторого вещественного решения первоначального уравнения и постараемся продолжить это решение на комплексную область так, чтобы для продолжения имели место гиперболическое уравнение (3) или же соответствующие системы уравнений; тогда можно будет на этом основании доказать аналитический характер получающейся таким способом комплексной функции. В этом заключается основная идея принадлежащего Гансу Леви метода доказательства аналитического характера решений эллиптических дифференциальных уравнений. В следующем параграфе мы изложим вкратце доказательство Леви [1]).

§ 2. Аналитический характер решений в эллиптическом случае

1. Предварительное замечание из области теории функций. Комплексная функция $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$ с непрерывными частными производными первого порядка называется аналитической функцией от обеих комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ в области B четырехмерного пространства x_1, x_2, y_1, y_2, если в этой области имеют место дифференциальные уравнения Коши-Римана

$$\nabla w = w_{x_1} + iw_{x_2} = 0, \qquad \Delta w = w_{y_1} + iw_{y_2} = 0. \tag{1}$$

Это определение равносильно следующему: w называется аналитической функцией в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если w может быть представлено в виде степенного ряда

$$w = \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu, \tag{2}$$

---

[1]) *Math. Ann.*, том 101, стр. 609 и следующие.