и y, то мы можем рассматривать u как функцию комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ или же как комплексную функцию четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2. Наше дифференциальное уравнение выражает первоначально в вещественной области, что

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

Но в комплексной области мы можем дифференцирование по y_1 заменить дифференцированием по iy_2; поэтому комплексная аналитическая функция u как функция от четырех переменных x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} = f(x, y, u, u_{x_1}, -iu_{y_2}), \tag{3}$$

имеющему формально гиперболический характер. Мы видим, таким образом, что право на такое преобразование уравнения эллиптического типа в уравнение гиперболического типа нам дает аналитический характер решения u, т. е. то обстоятельство, что производная функции по комплексному переменному не зависит от направления дифференцирования.

Мы можем теперь обратить этот ход рассуждения следующим образом: будем исходить из некоторого вещественного решения первоначального уравнения и постараемся продолжить это решение на комплексную область так, чтобы для продолжения имели место гиперболическое уравнение (3) или же соответствующие системы уравнений; тогда можно будет на этом основании доказать аналитический характер получающейся таким способом комплексной функции. В этом заключается основная идея принадлежащего Гансу Леви метода доказательства аналитического характера решений эллиптических дифференциальных уравнений. В следующем параграфе мы изложим вкратце доказательство Леви [1]).

§ 2. Аналитический характер решений в эллиптическом случае

1. Предварительное замечание из области теории функций. Комплексная функция $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$ с непрерывными частными производными первого порядка называется аналитической функцией от обеих комплексных переменных $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ в области B четырехмерного пространства x_1, x_2, y_1, y_2, если в этой области имеют место дифференциальные уравнения Коши-Римана

$$\nabla w = w_{x_1} + iw_{x_2} = 0, \qquad \Delta w = w_{y_1} + iw_{y_2} = 0. \tag{1}$$

Это определение равносильно следующему: w называется аналитической функцией в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, если w может быть представлено в виде степенного ряда

$$w = \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu} x^\nu y^\mu, \tag{2}$$

---

[1]) *Math. Ann.*, том 101, стр. 609 и следующие.

где $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$, при соответствующем выборе M[1]). w называется аналитичной в области B, если она аналитична в окрестности любой точки области B.

2. Аналитический характер решений уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Мы предполагаем, что в нашем дифференциальном уравнении

$$\Delta u = f(x, y, u, p, q) \tag{4}$$

функция f является вещественной аналитической функцией от своих пяти аргументов и что $u(x, y)$ — некоторое решение этого дифференциального уравнения, дважды непрерывно дифференцируемое в некоторой (вещественной) окрестности точки $x = 0$ и $y = 0$. Пусть f аналитична во всей области пятимерного пространства x, y, u, p, q, определяемой этой окрестностью точки $(0, 0)$ и множеством соответствующих значений функций (u, p, q). Мы утверждаем, что при этих условиях рассматриваемое решение u является не только дважды дифференцируемым, но и аналитическим. Доказательство мы проведем с помощью *продолжения на комплексную область*, а именно,

---

[1]) Что второе свойство разложимости в степенной ряд вытекает из определения Коши-Римана, доказывается следующим образом путем двукратного применения интегральной формулы Коши для комплексных переменных: пусть условия Коши-Римана (1) имеют место в области B, определенной условиями $|x| < M$, $|y| < M$. Окружность K_x: $|x - \xi| = \frac{M}{2}$, описанная из любой точки ξ_1, ξ_2 области $|\xi| \leqslant \frac{M}{2}$, лежит целиком внутри B. Точно так же все точки $|x - \xi| \leqslant \frac{M}{2}$ лежат в B. Считая временно y_1, y_2 параметрами, мы можем представить w в этой области на основании интегральной формулы Коши в следующем виде:

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_x} \frac{w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)}{(\xi_1 + i\xi_2) - (x_1 + ix_2)} (d\xi_1 + id\xi_2).$$

Точно так же окружность K_y: $|y - \eta| = \frac{M}{2}$ и все ее внутренние точки лежат в B, если η_1 и η_2 подчинены условию $|\eta| \leqslant \frac{M}{2}$. Мы можем поэтому, вторично применяя интеграл Коши, представить $w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2)$ в виде

$$w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_y} \frac{w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{(\eta_1 + i\eta_2) - (y_1 + iy_2)} (d\eta_1 + id\eta_2).$$

Подставляя в предыдущую формулу, мы получим двойной интеграл Коши

$$w(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{K_x} \int\limits_{K_y} w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \frac{(d\xi_1 + id\xi_2)(d\eta_1 + id\eta_2)}{(\xi_1 + i\xi_2 - x)(\eta_1 + i\eta_2 - y)}. \tag{3}$$

Разложим теперь дробный множитель подинтегрального выражения в степенной ряд по степеням x и y так же, как в случае одного переменного, и проинтегрируем этот ряд почленно. Мы получим таким путем искомое разложение w в степенной ряд.

мы дополним u до комплексной, дважды непрерывно дифференцируемой функции от x_1, x_2, y_1 и y_2, удовлетворяющей условиям (1)[1]). Введя комплексные переменные $x = x_1 + ix_2$ и $y = y_1 + iy_2$, мы докажем, что можно построить комплексную функцию $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$, которая при $x_2 = y_2 = 0$ совпадает с функцией $u(x, y)$, записываемой нами теперь в форме $u(x_1, y_1)$, так, чтобы она была аналитической относительно x и y. Мы произведем это продолжение постепенно, сначала переходя при фиксированном y_1 от функции $u(x_1, y_1)$ к комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1)$, а затем переходя от $u(x_1, x_2, y_1)$ к комплексной функции $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Прежде всего продолжим f аналитически на комплексные значения аргументов; тогда f непрерывно дифференцируема по этим аргументам. Первый шаг заключается в том, что мы x_1 рассматриваем как параметр, а новую функцию $u(x_1, x_2, y_1)$ стараемся определить с помощью дифференциального уравнения

$$u_{y_1y_1} - u_{x_2x_2} = f(x_1 + ix_2, y_1, u, -iu_{x_2}, u_{y_1}), \tag{5}$$

получающегося из (4) формальной заменой x через $x_1 + ix_2$. При этом x_1 рассматривается как фиксированный параметр, тогда как y_1 и x_2 являются вещественными независимыми переменными в комплексном решении u. Для этого дифференциального уравнения мы решаем задачу Коши с начальной кривой $x_2 = 0$. Начальные условия на этой кривой имеют вид

$$u(x_1, 0, y_1) = u(x_1, y_1), \tag{6}$$

причем в правой части стоит исходное вещественное решение уравнения (4).

Далее, мы задаем начальное значение производной u_{x_2} с помощью начального условия

$$\nabla u = u_{x_1} + iu_{x_2} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0. \tag{7}$$

Это условие выражает, таким образом, требование, чтобы уравнение Коши-Римана имело место вдоль начальной кривой $x_2 = 0$. Согласно изложенной выше теории дифференциальное уравнение (5) и начальные условия (6) и (7) однозначно определяют продолжение $u(x_1, x_2, y_1)$ функции $u(x_1, y_1)$ в некоторой окрестности начальной кривой. Из полученных раньше результатов следует далее, что функция $u(x_1, x_2, y_1)$ является непрерывно дифференцируемой функцией параметра x_1 в некотором промежутке изменения этого параметра, так что функция $u(x_1, x_2, y_1)$ определена в некоторой полной трехмерной прямоуголь-

---

[1]) В случае нашего дифференциального уравнения доказательство можно было бы столь же просто провести с помощью методов теории потенциала. Однако, излагаемый метод Ганса Леви представляет принципиальный интерес и открывает доступ к решению более трудных задач (см. *Math. Ann.*, т. 104, стр. 325 и следующие; *Trans. Amer. Math. Soc.*, т. 37 (1935), стр. 417 и следующие и т. 41 (1937), стр. 365 и следующие).

ной окрестности точки $x_1=0$, $x_2=0$, $y_1=0$, будучи в этой окрестности непрерывно дифференцируемой по x_1. Точно так же производная u_{x_2} непрерывно дифференцируема по x_1.

Дифференцируя второе начальное условие (7) по параметру x_1, мы получим $\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla u = u_{x_1x_1}+iu_{x_2x_1}=0$. Заметив, что при $x_2=0$ имеют место как дифференциальное уравнение (4), так и новое дифференциальное уравнение (5), служащее продолжением уравнения (4), мы получим, вычитая эти уравнения и учитывая начальное условие (7),

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=0 \qquad \text{при } x_2=0.$$

Таким образом, при $x_2=0$ имеет место уравнение

$$u_{x_2x_2}-iu_{x_2x_1}=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\nabla u=\frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1}+iu_{x_2})=0. \tag{8}$$

Применим теперь к дифференциальному уравнению (5) оператор Коши ∇. Положим для краткости $\nabla u=\omega$. Мы получим в результате этой дифференциальной операции

$$\omega_{y_1y_1}-\omega_{x_2x_2}=f_x\nabla x+f_u\nabla u-if_{u_x}\nabla u_{x_2}+f_{u_y}\nabla u_{y_1}.$$

Так как $\nabla x=0$, то мы можем записать это уравнение в следующем окончательном виде:

$$\omega_{y_1y_1}-\omega_{x_2x_2}=f_u\omega-if_{u_x}\omega_{x_2}+f_{u_y}\omega_{y_1}.$$

При этом после того, как функция $u(x_1, x_2, y_1)$ нами уже найдена, мы должны рассматривать коэффициенты f_u, f_{u_x} и f_{u_y} правой части как известные комплексные функции от y_1 и x_2. Таким образом, мы получили для ω однородное линейное гиперболическое уравнение второго порядка, для которого мы уже доказали раньше теорему о единственности решения задачи Коши.

Но в силу условий (7) и (8) начальные значения ω и $\frac{\partial\omega}{\partial x_2}$ равны нулю, откуда и следует на основании теоремы о единственности и благодаря однородности рассматриваемого дифференциального уравнения, что $\omega=0$ тождественно в некоторой трехмерной окрестности Q начала координат.

Мы должны теперь сделать второй шаг продолжения, а именно, продолжить u на четырехмерную область пространства x_1, x_2, y_1, y_2. Для этой цели фиксируем в Q какие-нибудь значения x_2 и y_1 и производим продолжение функции $u(x_1, x_2, y_1)$ с помощью гиперболического дифференциального уравнения

$$u_{x_1x_1}-u_{y_2y_2}=f(x, y, u, u_{x_1}-iu_{y_2}). \tag{9}$$

При этом мы задаем теперь в плоскости x_1, y_2 вдоль прямой $y_2 = 0$ в качестве первого начального условия

$$u(x_1, x_2, y_1, 0) = u(x_1, x_2, y_1),$$

а в качестве второго начального условия требование

$$\Delta u = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right)u = 0 \qquad \text{при } y_2 = 0. \tag{10}$$

Снова мы получаем, что функция $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ однозначно определяется этими условиями. Далее, в силу свойств непрерывности решения нашего дифференциального уравнения (9) относительно параметров x_2, y_1 мы убеждаемся в том, что это решение определено в некоторой четырехмерной окрестности B начала координат и является в этой области непрерывно дифференцируемой по параметрам x_2, y_1.

Чтобы, наконец, доказать аналитический характер u, нам остается только показать, что всюду в области B выполняются условия Коши-Римана $\nabla u = 0$ и $\Delta u = 0$. Условие $\Delta u = 0$ при $y_2 = 0$ является как раз нашим вторым начальным условием (10). Далее, при $y_2 = 0$ имеют место как дифференциальное уравнение (9), так и дифференциальное уравнение (5), и мы получаем, вычитая эти уравнения одно из другого и учитывая доказанное нами уравнение $\nabla u = 0$ при $y_2 = 0$ и уравнение (10):

$$u_{x_1x_1} - u_{y_2y_2} + u_{x_2x_2} - u_{y_1y_1} = 0 \text{ при } y_2 = 0.$$

Но при $y_2 = 0$ мы уже доказали, что $\nabla u = u_{x_1} + iu_{x_2} = 0$, откуда мы получим, дифференцируя по x_1, что при $y_2 = 0$

$$u_{x_1x_1} + iu_{x_1x_2} = 0.$$

Дифференцируя то же уравнение по x_2, мы получаем далее

$$u_{x_1x_2} + iu_{x_2x_2} = 0 \text{ или } u_{x_2x_2} - iu_{x_1x_2} = 0.$$

Складывая эти уравнения, мы получим:

$$\nabla\bar{\nabla}u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,$$

откуда

$$u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0. \tag{11}$$

Дифференцируя уравнение (10) по y_1, мы получаем, с другой стороны,

$$u_{y_1y_1} + iu_{y_1y_2} = 0,$$

так что в силу уравнения (11) выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\Delta u = 0 \qquad \text{при } y_2 = 0.$$

Рассуждая снова таким же образом, как и раньше, мы на основании теоремы о единственности решения задачи Коши для аналогичного прежнему однородного линейного дифференциального уравнения получим, что $\Delta u = 0$ во всей области B. Таким же образом доказывается, что $\nabla u = 0$ в B.

Убедившись в том, что u является аналитической функцией в комплексной окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, мы вместе с тем устано-

вили *аналитический характер в действительной области, т. е. разложимость в степенной ряд первоначального решения* $u(x, y)$ *нашего эллиптического дифференциального уравнения* $\Delta u = f$.

3. Замечание относительно общего случая дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Метод Леви приводит к цели также и в общем случае аналитического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Можно доказать следующую теорему: *Если* $u(x, y)$ — *трижды непрерывно дифференцируемое решение эллиптического дифференциального уравнения и если это дифференциальное уравнение аналитично относительно всех своих аргументов то функция* $u(x, y)$ *сама является аналитической функцией от обоих переменных* x *и* y.

Мы здесь не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы и отошлем читателя к имеющейся литературе[1]).

Отметим только, что основная идея доказательства в общем случае заключается в следующем.

Мы заменяем данное дифференциальное уравнение так же, как и в гл. V, § 8, квазилинейной системой дифференциальных уравнений. В силу эллиптического характера уравнения мы, однако, уже не можем ввести вещественные характеристические параметры α, β. Вместо этого мы можем совершенно аналогично методу, изложенному в гл. V, § 8, привести эту систему к системе дифференциальных уравнений вида

$$v^{\nu}_{\alpha\alpha} + v^{\nu}_{\beta\beta} = f_{\nu}(\alpha, \beta, v^1, \ldots; v^1_{\alpha}, \ldots; v^1_{\beta}, \ldots)$$

с неизвестными функциями $v^1, v^2, \ldots$

К такой системе может быть применена вся изложенная в п. 2 теория почти без изменений, что и дает возможность провести совершенно аналогичное предыдущему доказательство аналитического характера решения.

Метод Леви ограничен случаем двух независимых переменных, поскольку применяемый при этом методе процесс продолжения с помощью гиперболических дифференциальных уравнений может быть полностью проведен только в случае двух независимых переменных.

Теорема об аналитическом характере решений эллиптических дифференциальных уравнений в случае большего числа независимых переменных доказывается другими методами[2]).

§ 3. Дальнейшие замечания к теории характеристик в случае двух независимых переменных

Теория интегрирования общего нелинейного дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ может быть построена также и непосредственно без помощи перехода к вспомогательным квазили-

---

[1]) Леви (Lewy), *Math. Ann.*, т. 101, а также изложение доказательства Леви у Адамара, Leçons sur le problème de Cauchy, стр. 487 и следующие.

[2]) См., например, E. Hopf, *Math. Ztschr.*, т. 34, стр. 194 и следующие.