вили *аналитический характер в действительной области, т. е. разложимость в степенной ряд первоначального решения* $u(x, y)$ *нашего эллиптического дифференциального уравнения* $\Delta u = f$.

3. Замечание относительно общего случая дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Метод Леви приводит к цели также и в общем случае аналитического дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Можно доказать следующую теорему: *Если* $u(x, y)$ — *трижды непрерывно дифференцируемое решение эллиптического дифференциального уравнения и если это дифференциальное уравнение аналитично относительно всех своих аргументов то функция* $u(x, y)$ *сама является аналитической функцией от обоих переменных* x *и* y.

Мы здесь не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы и отошлем читателя к имеющейся литературе[1]).

Отметим только, что основная идея доказательства в общем случае заключается в следующем.

Мы заменяем данное дифференциальное уравнение так же, как и в гл. V, § 8, квазилинейной системой дифференциальных уравнений. В силу эллиптического характера уравнения мы, однако, уже не можем ввести вещественные характеристические параметры α, β. Вместо этого мы можем совершенно аналогично методу, изложенному в гл. V, § 8, привести эту систему к системе дифференциальных уравнений вида

$$v^{\nu}_{\alpha\alpha} + v^{\nu}_{\beta\beta} = f_{\nu}(\alpha, \beta, v^1, \ldots; v^1_{\alpha}, \ldots; v^1_{\beta}, \ldots)$$

с неизвестными функциями $v^1, v^2, \ldots$

К такой системе может быть применена вся изложенная в п. 2 теория почти без изменений, что и дает возможность провести совершенно аналогичное предыдущему доказательство аналитического характера решения.

Метод Леви ограничен случаем двух независимых переменных, поскольку применяемый при этом методе процесс продолжения с помощью гиперболических дифференциальных уравнений может быть полностью проведен только в случае двух независимых переменных.

Теорема об аналитическом характере решений эллиптических дифференциальных уравнений в случае большего числа независимых переменных доказывается другими методами[2]).

§ 3. Дальнейшие замечания к теории характеристик в случае двух независимых переменных

Теория интегрирования общего нелинейного дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ может быть построена также и непосредственно без помощи перехода к вспомогательным квазили-

---

[1]) Леви (Lewy), *Math. Ann.*, т. 101, а также изложение доказательства Леви у Адамара, Leçons sur le problème de Cauchy, стр. 487 и следующие.

[2]) См., например, E. Hopf, *Math. Ztschr.*, т. 34, стр. 194 и следующие.

нейным системам, причем основная идея решения остается той же[1]), что и в гл. V, § 8. Мы ищем восемь величин x, y, u, p, q, r, s, t как функции характеристических параметров α и β. Соответствующая каноническая гиперболическая квазилинейная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка получается при этом на основании тех же соображений, что и раньше, следующим образом.

Введем сокращенные обозначения

$$[F]_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x,$$
$$[F]_y = F_p s + F_q t + F_u q + F_y.$$

Продифференцировав данное уравнение по x и y и обозначая через α и β характеристические параметры на рассматриваемой интегральной поверхности, напишем условия полоски для характеристических параметров $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$. Мы получаем тогда, что матрица

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_x \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -r_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -s_\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

и матрица

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_y \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -s_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -t_\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

должны иметь ранг, меньший трех.

Это дает нам оба характеристических уравнения

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda \end{vmatrix} = F_t x_\lambda^2 - F_s x_\lambda y_\lambda + F_r y_\lambda^2 = 0$$

или, после расщепления,

$$y_\alpha - \rho_1 x_\alpha = 0; \qquad y_\beta - \rho_2 x_\beta = 0,$$

где ρ_1 и ρ_2 — известные функции от x, y, u, p, q, r, s, t.

Кроме этого, мы получаем из условия относительно ранга матриц четыре дальнейших уравнения. К этим уравнениям мы должны еще присоединить шесть условий полоски для $u_\alpha, u_\beta, p_\alpha, p_\beta, q_\alpha, q_\beta$. Всего мы получаем, таким образом, 12 дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с восемью неизвестными функциями $x, y, \ldots, s, t$ от α и β. Из этих уравнений мы выбираем затем восемь подходящих уравнений и доказываем, что остающиеся четыре уравнения являются следствиями первых восьми при соответ-

[1]) Этот переход к квазилинейным системам удобен при изложении теории в том отношении, что дает возможность расщепить задачу на ряд последовательных задач возрастающей степени трудности. Принципиально же этот переход не дает сокращения доказательства.

ствующих начальных условиях. Выделенная система восьми уравнений может быть решена с помощью методов гл. V, § 7, и мы доказываем затем совершенно так же, как и раньше, что решение этой системы дает нам решение первоначального дифференциального уравнения. Подробности читатель найдет в имеющейся литературе[1]).

§ 4. Особая роль уравнения Монжа-Ампера

В случае линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений теория характеристик сама по себе дает сразу, вместо системы уравнений с восемью неизвестными функциями $x, \ldots, t$ от α и β, более простую систему, состоящую только из пяти уравнений с пятью неизвестными функциями x, y, u, p, q. Замечательным является тот факт, что такое же упрощение имеет место также и в одном случае не-квазилинейного уравнения, а именно, в *случае дифференциального уравнения Монжа-Ампера.*

Дифференциальное уравнение Монжа-Ампера, играющее очень важную роль в геометрии, имеет следующий вид:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E — заданные функции от x, y, u, p, q. Это дифференциальное уравнение занимает поэтому в известном смысле промежуточное место между квазилинейными уравнениями и общими нелинейными дифференциальными уравнениями.

Как легко убедиться, уравнение (1) является уравнением гиперболического типа тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$B^2 - 4AC + 4ED > 0. \tag{2}$$

Из условий $p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha$ и $q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha$ мы получаем

$$(rt - s^2)y_\alpha = rq_\alpha - sp_\alpha.$$

Соответственно имеем:

$$(rt - s^2)y_\beta = rq_\beta - sp_\beta.$$

Ввиду этого мы получим характеристические условия, потребовав, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} Ay_\alpha + Dq_\alpha & By_\alpha - Dp_\alpha & Cy_\alpha & Ey_\alpha \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & -q_\alpha \end{pmatrix},$$

а также вторая матрица, получающаяся заменой α через β, имели ранг, меньший трех. После некоторых преобразований *) мы придем к следующей характеристической системе, заменяющей заданное дифференциальное уравнение:

---

[1]) Леви (Lewy), Адамар, Фридрихс-Леви в цитированных выше местах.

*) См. примечание переводчиков в конце книги.