ствующих начальных условиях. Выделенная система восьми уравнений может быть решена с помощью методов гл. V, § 7, и мы доказываем затем совершенно так же, как и раньше, что решение этой системы дает нам решение первоначального дифференциального уравнения. Подробности читатель найдет в имеющейся литературе[1]).

§ 4. Особая роль уравнения Монжа-Ампера

В случае линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений теория характеристик сама по себе дает сразу, вместо системы уравнений с восемью неизвестными функциями $x, \ldots, t$ от α и β, более простую систему, состоящую только из пяти уравнений с пятью неизвестными функциями x, y, u, p, q. Замечательным является тот факт, что такое же упрощение имеет место также и в одном случае не-квазилинейного уравнения, а именно, в *случае дифференциального уравнения Монжа-Ампера.*

Дифференциальное уравнение Монжа-Ампера, играющее очень важную роль в геометрии, имеет следующий вид:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E — заданные функции от x, y, u, p, q. Это дифференциальное уравнение занимает поэтому в известном смысле промежуточное место между квазилинейными уравнениями и общими нелинейными дифференциальными уравнениями.

Как легко убедиться, уравнение (1) является уравнением гиперболического типа тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$B^2 - 4AC + 4ED > 0. \tag{2}$$

Из условий $p_\alpha = rx_\alpha + sy_\alpha$ и $q_\alpha = sx_\alpha + ty_\alpha$ мы получаем

$$(rt - s^2)y_\alpha = rq_\alpha - sp_\alpha.$$

Соответственно имеем:

$$(rt - s^2)y_\beta = rq_\beta - sp_\beta.$$

Ввиду этого мы получим характеристические условия, потребовав, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} Ay_\alpha + Dq_\alpha & By_\alpha - Dp_\alpha & Cy_\alpha & Ey_\alpha \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & -q_\alpha \end{pmatrix},$$

а также вторая матрица, получающаяся заменой α через β, имели ранг, меньший трех. После некоторых преобразований *) мы придем к следующей характеристической системе, заменяющей заданное дифференциальное уравнение:

---

[1]) Леви (Lewy), Адамар, Фридрихс-Леви в цитированных выше местах.

*) См. примечание переводчиков в конце книги.

Квадратное уравнение

$$\rho^2 - B\rho + AC - ED = 0 \tag{3}$$

имеет в силу условия (2) два различных вещественных корня, которые мы обозначим через ρ_1 и ρ_2. ρ_1 и ρ_2 являются функциями от x, y, u, p и q.

Тогда имеет место следующая характеристическая система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 x_\alpha - Ay_\alpha - Dq_\alpha &= 0, \\ \rho_2 x_\beta - Ay_\beta - Dq_\beta &= 0, \\ \rho_1 y_\alpha - By_\alpha + Dp_\alpha + Cx_\alpha &= 0, \\ Ey_\beta + \rho_2 p_\beta + Cq_\beta &= 0, \\ u_\alpha - px_\alpha - qy_\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Далее, легко доказать, что при соответствующих начальных условиях система (4) эквивалентна задаче Коши для первоначального дифференциального уравнения.

Особая роль уравнений типа Монжа-Ампера выясняется также и при следующем рассмотрении, касающемся задачи Коши.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, квадратное относительно вторых производных, вида

$$L[u] = Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + Drs + Ert + Fst + Gr + Hs + It + K = 0, \tag{5}$$

где $A, \ldots, K$ — заданные функции от x, y, u, p, q. Для такого уравнения $L[u] = 0$ требуется решить задачу Коши вдоль кривой $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, задавая начальные значения $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, причем имеет место условие полоски

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}.$$

Для того, чтобы решить эту задачу, мы должны, прежде всего, дополнить заданную полоску первого порядка до интегральной полоски второго порядка, вычисляя начальные значения r, s, t из уравнения $L = 0$ и условий полоски $r\dot{x} + s\dot{y} = \dot{p}$, $s\dot{x} + t\dot{y} = \dot{q}$.

В силу квадратичности выражения L такое дополнение, вообще говоря, возможно двумя способами. Оказывается, что среди всех уравнений вида (5) уравнения Монжа-Ампера являются единственными уравнениями, обладающими тем свойством, что для них всякая полоска первого порядка может быть только одним способом дополнена до интегральной полоски.

Для доказательства положим $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\alpha$; тогда *) $s = \alpha t + \ldots$; $r = \alpha^2 t + \ldots$, где многоточиями обозначены выражения, известные

*) См. примечание переводчиков в конце книги.

вдоль полоски первого порядка. Подставив эти выражения в уравнение $L=0$, мы получим для t квадратное уравнение, причем коэффициент при t^2 имеет следующий вид:

$$A\alpha^4+D\alpha^3+(E+B)\alpha^2+F\alpha+C.$$

Для того, чтобы это выражение обращалось в нуль при любом значении α, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $A=D=F=C=0$, $E+B=0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что этот результат, получающийся для задачи Коши в гиперболическом случае, тем более замечателен, что для краевой задачи дифференциального уравнения Монжа-Ампера эллиптического типа возможна двузначность решения, как мы это показали в гл. IV, § 5, п. 3.