неискажающихся проходящих сферических волн высшей ступени существует только в случае справедливости принципа Гюйгенса и что семейства проходящих сферических волн в собственном смысле (сферические волны первой ступени) могут существовать только при $n=2$ и $n=4$.

Доказательство этого предположения вместе с доказательством предположения Адамара (см. § 9, п. 1) обнаружило бы существенную характеристическую особенность четырехмерного пространственно-временного многообразия и относящейся к этому многообразию классической теории Максвелла.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ VI

§ 1. Дифференциальные уравнения кристаллооптики

В этом параграфе мы проведем полностью интегрирование дифференциальных уравнений кристаллооптики [1]) и для этой цели предпошлем исследование геометрического характера соответствующих поверхностей Френеля, т. е. поверхностей нормалей и волновых поверхностей.

1. Поверхности нормалей и лучей кристаллооптики. Напомним данное нами раньше определение (см. гл. VI, § 3, п. 3): направления нормалей к различным возможным фронтам волны, проходящим через данную точку, задаваемые в пространстве ξ, τ отношениями $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\tau$ компонент направляющего вектора, образуют *конус нормалей* четвертого порядка, уравнение которого имеет вид

$$H\left(\frac{\xi_1}{\tau}, \frac{\xi_2}{\tau}, \frac{\xi_3}{\tau}\right)=0. \tag{1}$$

Конус Монжа дифференциальных уравнений кристаллооптики, имеющий прямолинейные образующие и состоящий из всех лучей, выходящих из начала координат пространства x, t, мы называем *конусом лучей*. Если отождествить между собой оба пространства, то мы получим, что касательные плоскости одного конуса перпендикулярны к соответствующим лучам другого.

Если пересечь эти конусы плоскостями $\tau=1$ и $t=1$ или же плоскостями $\tau=-1$ и $t=-1$, что не меняет вида сечения, ибо конусы симметричны относительно начала координат, то мы получим *поверхность нормалей* N и соответственно *поверхность лучей* S. Конус лучей и конус нормалей, а также поверхность лучей и поверхность нормалей могут быть преобразованы друг в друга с помощью преобразования взаимными полярами, указанного в гл. VI, § 2, п. 7 [2]).

---

[1]) См. G. Herglotz, Berichte sächsischer Akademie, 1926, а также его Курс лекций по механике сплошных сред.

[2]) В силу симметрии этих поверхностей относительно начала координат можно, впрочем, заменить это преобразование, приведенное в § 2, преобразованием взаимными полярами относительно вещественных поверхностей $\sum \xi_i^2=1$ и $\sum x_i^2=1$.

Особенную роль играют те точки поверхности нормалей, в которых поверхность имеет несколько касательных плоскостей; мы увидим (см. конец п. 2), что такие точки являются коническими вершинами с семейством касательных плоскостей, огибающих некоторый конус второго порядка. Этим касательным плоскостям соответствует на поверхности лучей семейство точек, лежащих в одной плоскости. То же самое относится и к коническим точкам, через которые проходит семейство опорных плоскостей, зависящих от двух параметров. *Такое семейство плоскостей преобразуется в плоский кусок другой поверхности,* причем в конической точке поверхности нормалей все нормали к опорным плоскостям должны считаться возможными нормалями фронтов волны.

2. Форма поверхности нормалей. Согласно гл. VI, § 3, п. 3 уравнение поверхности нормалей в пространстве ξ может быть представлено в виде

$$H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

или

$$H = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 [1 - \Psi(\xi) + \rho^2 \Phi(\xi)] = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2; \quad \Psi(\xi) &= \frac{\rho^2 - \xi_1^2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2 - \xi_2^2}{\sigma_2} + \frac{\rho^2 - \xi_3^2}{\sigma_3}; \\ \Phi(\xi) &= \frac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Докажем, *что всякий луч, выходящий из начала координат, пересекает поверхность нормалей в двух вещественных точках.*

В самом деле, обозначим через $\vec{e}$ единичный вектор пространства x и пусть $\xi_i = \rho e_i$. Точки пересечения луча, имеющего направляющие косинусы e_i, с поверхностью нормалей определяются уравнением четвертой степени, которое в силу однородности Φ и Ψ может быть записано в виде

$$\rho^4 \Phi(e) - \rho^2 \Psi(e) + 1 = 0. \qquad (3)$$

Чтобы доказать вещественность корней этого уравнения, покажем сначала, что дискриминант

$$X(e) = \Psi^2(e) - 4\Phi(e) \qquad (4)$$

уравнения (3) ни для какого единичного вектора $\vec{e}$ не становится отрицательным. Положим:

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}; \qquad A_2 = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_3}; \qquad A_3 = \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} X(e) &= \Psi^2(e) - 4\Phi(e)\sum_i e_i^2 = \\ &= A_1^2e_1^4 + A_2^2e_2^4 + A_3^2e_3^4 - 2A_2A_3e_2^2e_3^2 - 2A_3A_1e_3^2e_1^2 - 2A_1A_2e_1^2e_2^2 = \\ &= [(e_1\sqrt{A_1} + e_3\sqrt{A_3})^2 - A_2e_2^2]\,[(e_1\sqrt{A_1} - e_3\sqrt{A_3})^2 - A_2e_2^2] = \\ &= \Pi(e_1\sqrt{A_1} \pm e_2\sqrt{A_2} \pm e_3\sqrt{A_3}), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

причем произведение берется по всем четырем комбинациям знаков. Не ограничивая общности, предположим, например, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, так что $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $A_3 > 0$. Тогда первый и третий члены каждого из четырех множителей X вещественны, а второй член является чисто мнимым; поэтому четыре линейных множителя X являются попарно комплексно-сопряженными, откуда и следует, что $X \geqslant 0$. Случай $X = 0$ может иметь место только тогда, когда вещественная и мнимая части какого-нибудь множителя обращаются одновременно в нуль, т. е. либо в случае $e_2 = 0$, $e_1\sqrt{A_1} + e_3\sqrt{A_3} = 0$, либо в случае $e_2 = 0$, $e_1\sqrt{A_1} - e_3\sqrt{A_3} = 0$.

Из уравнения (3) мы получаем $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2}[\Psi(e) \pm \sqrt{X(e)}]$, причем из (4) следует, что

$$\Psi^2(e) \geqslant X(e).$$

Это доказывает, что все четыре корня ρ уравнения (3) вещественны.

Таким образом, поверхность нормалей состоит из двух полостей

$$\Psi(e) - \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\rho^2} \quad \text{и} \quad \Psi(e) + \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\rho^2}.$$

В силу однородности функций $\Psi(e)$ и $X(e)$ мы можем представить уравнения обеих полостей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Psi(\xi) - f(\xi) &= 2 \quad \text{(внешняя полость)}, \\ \Psi(\xi) + f(\xi) &= 2 \quad \text{(внутренняя полость)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При этом

$$X(\xi) = \Psi^2(\xi) - 4\rho^2\Phi(\xi); \quad (7)$$

$$f(\xi) = |\sqrt{X(\xi)}|. \quad (8)$$

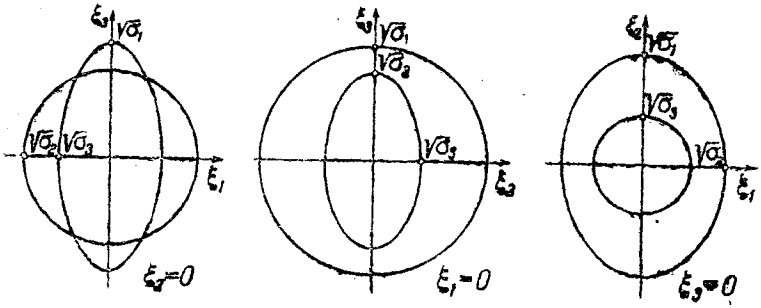
Обе полости пересекаются только в четырех точках, лежащих при условии $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ в плоскости ξ_1, ξ_3 на прямых:

$$\xi_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}} \pm \xi_3\sqrt{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}} = 0.$$

Чтобы получить наглядное представление об этой поверхности, рассмотрим ее *сечения с плоскостями координат*.

При $\xi_2 = 0$ мы получаем в силу (5) $f(\xi) = A_1\xi_1^2 - A_3\xi_3^2$, $\Psi(\xi) = \xi_1^2\left(\frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_2}\right) + \xi_3^2\left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right)$, так что либо

$$\left.\begin{aligned} &\Psi + f - 2 = 2\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1} - 1\right) = 0, \\ \text{либо}\quad &\Psi - f - 2 = 2\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_2} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$



Черт. 45.

Таким образом, сечение распадается на *окружность* и *эллипс, пересекающий окружность в четырех двойных точках*. Точно так же для плоскости $\xi_1 = 0$ мы получаем:

$$\text{либо}\ \frac{\xi_2^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1 = 0,\ \text{либо}\ \xi_2^2 + \xi_3^2 - \sigma_1 = 0,$$

а для плоскости $\xi_3 = 0$

$$\text{либо}\ \frac{\xi_1^3}{\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_1} - 1 = 0,\ \text{либо}\ \xi_1^2 + \xi_2^2 - \sigma_3 = 0.$$

В последних двух случаях сечение состоит из эллипса и не пересекающей его окружности. Внутренняя полость поверхности нормалей является выпуклой, так как в противном случае существовала бы прямая, пересекающая эту полость более чем в двух точках, так что эта прямая пересекала бы всю нашу поверхность по крайней мере в пяти точках, что невозможно, ибо эта поверхность четвертого порядка. Что касается внешней полости, то она является невыпуклой поверхностью, как это следует уже из формы сечения поверхности с плоскостью $\xi_2 = 0$. Внешняя полость имеет в четырех двойных точках четыре конические вершины, направленные внутрь, тогда как внутренняя полость имеет в этих точках конические вершины, направленные вовне.

3. Поверхность лучей. Так как поверхность лучей получается из поверхности нормалей с помощью преобразования взаимными полярами, то поверхность лучей является двойственным образом поверхности нормалей. Взаимно однозначное соответствие между этими поверхностями имеет место во всех тех точках поверхности нормалей N, в которых существует непрерывно перемещающаяся касательная плоскость. В конической вершине поверхности N однозначность соответствия нарушается, и такой вершине соответствует целый плоский кусок поверхности лучей.

Выпуклой поверхности N, содержащей начало координат, соответствует также выпуклая замкнутая поверхность S; в самом деле, в противном случае поверхность S имела бы, по крайней мере, три параллельные касательные плоскости, которым на N соответствовали бы три точки, лежащие на одной прямой.

Уравнение поверхности нормалей может быть представлено, как мы видели в гл. VI, § 3, п. 3, либо в виде

$$\frac{\sigma_1\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}+\frac{\sigma_2\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}+\frac{\sigma_3\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}=0, \tag{10}$$

либо в виде

$$\frac{\xi_1^2}{\rho^2-\sigma_1}+\frac{\xi_2^2}{\rho^2-\sigma_2}+\frac{\xi_3^2}{\rho^2-\sigma_3}=1. \tag{10'}$$

Путем простых, но довольно длинных вычислений мы отсюда получаем уравнение поверхности лучей в форме

$$\frac{\eta_1^2}{\sigma_1R^2-1}+\frac{\eta_2^2}{\sigma_2R^2-1}+\frac{\eta_3^2}{\sigma_3R^2-1}=0 \qquad (R^2=\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2) \tag{11}$$

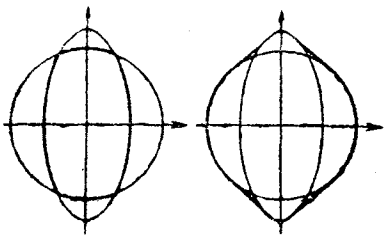
или

$$\frac{\sigma_1\eta_1^2}{\sigma_1R^2-1}+\frac{\sigma_2\eta_2^2}{\sigma_2R^2-1}+\frac{\sigma_3\eta_3^2}{\sigma_3R^2-1}=1. \tag{11'}$$

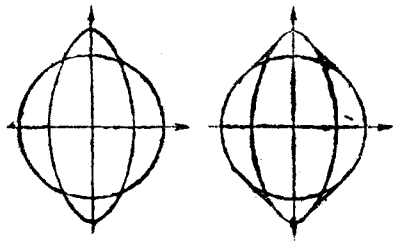
Отсюда следует, что поверхность лучей имеет такой же вид, как и поверхность нормалей, отличаясь только тем, что параметры σ_1, σ_2, σ_3 заменены обратными величинами $\sigma_1'=\frac{1}{\sigma_1}$, $\sigma_2'=\frac{1}{\sigma_2}$, $\sigma_3'=\frac{1}{\sigma_3}$.

Однако, точки, соответствующие коническим вершинам поверхности нормалей, не получаются из наших уравнений (11). Чтобы получить двойственный образ S поверхности нормалей, мы должны присоединить к поверхности лучей, задаваемой уравнениями (11) или (11′) еще четыре плоских куска поверхности S, соответствующих вершинам поверхности нормалей. Поверхность лучей (11) так же, как и поверхность нормалей (10), распадается на две полости, из которых внутренняя является выпуклой, а внешняя имеет четыре направленные внутрь конические вершины (воронки). Нетрудно убедиться в том, что внутренней выпуклой полости поверхности нормалей соответствует *наименьшая выпуклая оболочка поверхности*

лучей; коническим вершинам внутренней полости поверхности нормалей соответствуют при этом четыре плоские крышки, закрывающие четыре впадины, имеющиеся на внешней полости поверхности лучей и дополняющие выпуклую часть этой внешней полости до замкнутой выпуклой поверхности, имеющей четыре плоские грани. Заметим, что при двойственном преобразовании, превращающем одну в другую поверхность нормалей и поверхность лучей, внутренней полости поверхности нормалей соответствует не вся внешняя полость поверхности лучей, а только та выпуклая часть этой полости, которая дополняется с помощью четырех плоских крышек до замкнутой выпуклой поверхности; остающаяся часть внешней полости поверхности лучей, состоящая из четырех воронок, вместе с внутренней



Черт. 46.



Черт. 47.

полостью этой поверхности соответствуют внешней полости поверхности нормалей, причем воронкам поверхности лучей соответствуют воронки поверхности нормалей. На черт. 46 и 47 схематически изображена эта связь между обеими поверхностями, причем соответствующие друг другу части отмечены одинаково начерченными линиями. Плоские крышки касаются поверхности лучей (11), являющейся поверхностью четвертого порядка, вдоль некоторой линии. Эта *линия прикосновения* должна быть плоской кривой четвертого порядка, состоящей *целиком* из двойных точек, так что она должна представлять собой двойное коническое сечение. Легко убедиться, что эта линия является *окружностью*. В самом деле, уравнение поверхности лучей (11) в однородных координатах η_1, η_2, η_3 и τ может быть записано в виде $\tau^4 - \tau^2 \Psi_1(\eta) + R^2 \Phi_1(\eta) = 0$, где функции $\Psi_1(\eta)$ и $\Phi_1(\eta)$ получаются из $\Psi(\eta)$ и $\Phi(\eta)$ путем замены параметров σ_i обратными значениями $\frac{1}{\sigma_i}$. Из этого следует, что наша поверхность содержит абсолютный круг пространства, задаваемый уравнениями $\tau = 0$ и $R^2 = 0$. Поэтому всякое плоское сечение поверхности проходит через обе абсолютные точки секущей плоскости; таким образом, если сечение распадается на две вещественные кривые второго порядка, то одно из этих конических сечений должно содержать обе круговые (абсолютные) точки секущей плоскости и представляет собой поэтому окружность. В частности, это относится

к линиям прикосновения четырех крышек. (Наше рассуждение, между прочим, снова подтверждает тот факт, что одна из линий пересечения нашей поверхности с каждой плоскостью координат является окружностью.)

4. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению шестого или четвертого порядка. Компоненты u_1, u_2, u_3 электрического вектора $\mathfrak{E}$ удовлетворяют согласно гл. VI, § 3, п. 3 следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1\ddot{u}_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_3};\\
\sigma_2\ddot{u}_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2\partial x_1};\\
\sigma_3\ddot{u}_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3\partial x_1}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3\partial x_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Введем символические обозначения $\xi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и $\tau=\frac{\partial}{\partial t}$ и пусть умножение этих символов означает последовательное применение соответствующих операций дифференцирования. Пусть, далее,

$$\rho^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2, \qquad D_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}(\rho^2-\sigma_\alpha\tau^2)-\xi_\alpha\xi_\beta,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{\alpha\beta}=1$ при $\alpha=\beta$ и $\delta_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$.

Запишем теперь систему (12) в форме

$$\sum_\beta D_{\alpha\beta}u_\beta=0. \tag{13}$$

Требуется найти те решения u_1, u_2, u_3 этих уравнений, которые вместе со своими первыми производными по переменной времени t при $t=0$ принимают заданные значения

$$u_\alpha(x,\ 0)=f_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3); \qquad \frac{\partial u_\alpha(x,\ 0)}{\partial t}=g_\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{13'}$$

Обозначим через $D^{\alpha\beta}$ минор, соответствующий элементу $D_{\alpha\beta}$ в символической матрице третьего порядка, образуемой символами $D_{\alpha\beta}$, так что $D^{\alpha\beta}$ является дифференциальным оператором четвертого порядка. Будем теперь искать три функции φ_1, φ_2, φ_3, удовлетворяющие требованию, чтобы составленные из них функции

$$u_\alpha=\sum_\beta D^{\alpha\beta}\varphi_\beta \tag{14}$$

удовлетворяли системе уравнений (13). Мы тогда получим, что каждая из трех функций φ_α должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$D\varphi=0, \tag{15}$$

где $D(\xi, \tau)$ обозначает форму шестой степени:

$$D(\xi, \tau) = \begin{vmatrix} \rho^2 - \xi_1^2 - \sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \rho^2 - \xi_2^2 - \sigma_2\tau^3 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \rho^2 - \xi_3^2 - \sigma_3\tau^2 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Если мы найдем три различных решения φ_1, φ_2, φ_3 уравнения (15), удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t}(x, 0) = \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial t^2}(x, 0) = \frac{\partial^3\varphi_\alpha}{\partial t^3}(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial^4\varphi_\alpha}{\partial t^4}(x, 0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} f_\alpha(x); \\ \frac{\partial^5\varphi_\alpha}{\partial t^5}(x, 0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} g_\alpha(x), \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

то составленные из них по формуле (14) выражения u_α действительно являются решениями рассматриваемой задачи Коши. В самом деле,

$$u_\alpha(x, 0) = D^{\alpha\alpha}\varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\varphi_\alpha(x, 0) = f_\alpha(x);$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}(x, 0) = D^{\alpha\alpha}\tau\varphi_\alpha(x, 0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\varphi_\alpha(x, 0) = g_\alpha(x).$$

Мы можем, далее, ограничиться случаем $f_\alpha = 0$, ибо если φ^* и ψ^* решения уравнения (15), удовлетворяющие условиям

$$\varphi^* = \varphi^*_t = \ldots = \varphi^*_{tttt} = 0,$$

$$\varphi^*_{ttttt} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} f_\alpha; \psi^* = \psi^*_t = \ldots = \psi^*_{tttt} = 0,$$

$$\psi^*_{ttttt} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} g_\alpha - \varphi^*_{tttttt},$$

то функция $\varphi = \varphi^*_t + \psi^*$ будет решением уравнения (15), удовлетворяющим начальным условиям (17). Мы можем теперь привести нашу задачу к решению *дифференциального уравнения четвертого порядка*.

В самом деле, $D(\xi, \tau)$ является однородным полиномом шестой степени от ξ, τ, причем $D(\xi, 1) = H(\xi)$ [см. п. 2, формула (2)]. Согласно п. 2, формуле (2), мы получаем:

$$D(\xi, \tau) = \tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}\right) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,[\tau^6 - \Psi(\xi)\tau^4 + \Phi(\xi)\rho^2\tau^2] =$$

$$= -\sigma_1\sigma_2\sigma_3\,[\tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \Phi(\xi)\rho^2]\,\tau^2.$$

Из предыдущего следует, что уравнение $D\varphi = 0$ приводится к уравнению четвертого порядка. В самом деле, положим

$$F(\xi, \tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \Phi(\xi)\rho^2 \quad (18)$$

и пусть $v(x, t)$ решение уравнения

$$F(\xi, \tau)v = 0, \quad (19)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v = v_t = v_{tt} = 0; \quad v_{ttt} = g(x). \quad (20)$$

Тогда функция $u = \int\limits_0^t (t-\tau)\, v(x, \tau)\, d\tau$ является решением уравнения $D(\xi, \tau)\, u = 0$, удовлетворяющим начальным условиям $u = u_t = u_{tt} = u_{ttt} = u_{tttt} = 0$ и $u_{ttttt} = g$. В самом деле, $u_{tt} = v$; поэтому из уравнения $Fu_{tt} = 0$ следует, что $Du = 0$. Далее, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$; $u_{tt}(x, 0) = v(x, 0) = 0$; $u_{ttt}(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$; $u_{tttt}(x, 0) = v_{tt}(x, 0) = 0$; и, наконец, $u_{ttttt}(x, 0) = v_{ttt}(x, 0) = g(x)$.

5. Явный вид решения, получающийся методом Фурье. Для того, чтобы функция $e^{i(\alpha x)+i\beta t} = e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta t)}$ удовлетворяла уравнению (19), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $F(\alpha, \beta) = \beta^4 - \beta^2 \Psi(\alpha) + r^2 \Phi(\alpha) = 0$ $(r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$. Полагая

$$\beta_1^2 = \frac{1}{2}\left[\Psi(\alpha) + \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\,\right], \quad \beta_2^2 = \frac{1}{2}\left[\Psi(\alpha) - \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\,\right],$$

мы получим частные решения вида

$$e^{i(\alpha x)}\left(a_1 e^{i\beta_1 t} + a_2 e^{i\beta_2 t} + a_3 e^{i\beta_3 t} + a_4 e^{i\beta_4 t}\right),$$

где $(\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$.

Константы a_1, a_2, a_3, a_4 мы можем определить так, чтобы выражение, заключенное в скобки, вместе со своими двумя первыми производными по t, обращалось в нуль при $t = 0$, а третья производная по t принимала при $t = 0$ значение, равное единице. Мы получим выражение:

$$\frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right),$$

являющееся всюду непрерывной функцией от β_1 и β_2. Поэтому, мы ищем искомое решение v в форме

$$v(x, t) = \iiint A(\alpha)\, \frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$$

и выбираем $A(\alpha)$ так, чтобы выполнялось условие

$$g(x) = \iiint A(\alpha)\, e^{i(\alpha x)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3,$$

откуда следует, что

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint g(\xi)\, e^{-i(\alpha\xi)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3.$$

Отсюда мы получаем:

$$v(x, t) = \iiint g(\xi)\, K(x - \xi, t)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3, \tag{21}$$

где

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3. \tag{22}$$

Уравнение (21) и дает нам искомое выражение для решения задачи Коши (19), (20) с помощью ядра $K(x, t)$.

6. Исследование разрешающего ядра $K(x, t)$. Имеем:

$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = \sqrt{\Psi^2(\alpha) - 4r^2\Phi(\alpha)} = f(\alpha); \quad \beta_1^2 = \frac{1}{2}[\Psi(\alpha) + f(\alpha)];$$

$$\beta_2^2 = \frac{1}{2}[\Psi(\alpha) - f(\alpha)].$$

Положим теперь во втором члене подинтегрального выражения интеграла (22): $\alpha_\nu = s\xi_\nu$, $s = \frac{r}{\rho}$, где $\rho^2 = \sum_\nu \xi_\nu^2$, и пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты точки пересечения радиуса-вектора α с *внешней* полостью поверхности нормалей $\Psi(\xi) - f(\xi) = 2$. Другими словами, *мы принимаем внешнюю полость поверхности нормалей за «нормирующую поверхность»* (Eichfläche). В силу однородности функций Φ, Ψ, r мы получим: $s = |\beta_2|$; $d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 = s^2 \cos(N, \xi)\rho\, do_\xi\, ds$, где (N, ξ) обозначает угол между лучом (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и внешней нормалью к внешней полости поверхности нормалей, а do_ξ — элемент поверхности этой полости. Второе слагаемое дает нам с помощью этого преобразования интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \int\int e^{is(\xi x)} \frac{\rho\cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi,$$

где N снова обозначает внешнюю нормаль.

Для первого слагаемого подинтегрального выражения (22) мы возьмем в качестве нормирующей поверхности *внутреннюю полость* поверхности нормалей, так что ξ_1, ξ_2, ξ_3 теперь обозначают точку пересечения луча (α) с внутренней полостью $\Psi(\xi) + f(\xi) = 2$. На этой поверхности $s = |\beta_1|$, так что соответствующий интеграл принимает вид

$$-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \int\int e^{is(\xi x)} \frac{\rho\cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi,$$

Черт. 48.

где N снова обозначает внешнюю нормаль.

Положим теперь $d\omega_\xi = \frac{\rho\cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$ на внешней полости и $d\omega_\xi = -\frac{\rho\cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$ на внутренней полости. Мы получим:

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \int\int e^{is(\xi x)}\, d\omega_\xi,$$

причем внутренний интеграл берется по всей поверхности нормалей. Изменяя порядок интегрирования и учитывая симметрию поверхности

нормалей и выражения $d\omega_\xi$ относительно начала координат, мы можем представить $K(x, t)$ в форме

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d\omega_\xi \int_0^\infty \frac{\cos s(\xi x) \sin st}{s} ds.$$

Вычисляя входящий в интеграл разрывный множитель Дирихле (см. т. I, стр. 75), мы получим:

$$K(x, t) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leq t} d\omega_\xi.$$

Так как

$$K(x, t) = K\left(\frac{x}{t}, 1\right),$$

то достаточно рассмотреть

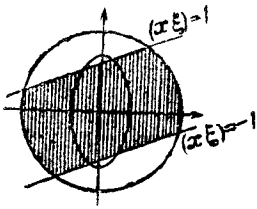
$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leq 1} d\omega_\xi. \tag{23}$$

Последний интеграл берется, таким образом, по части поверхности нормалей, заключенной между обеими полярными плоскостями $(x\xi) = \pm 1$ точки x относительно единичной сферы.

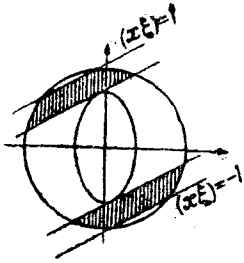
Если на всей поверхности нормалей выполняется соотношение $|(x\xi)| \leqslant 1$, то

$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint d\omega_\xi,$$

где интеграл берется по всей поверхности нормалей. Это есть тот случай, когда точка x для любой точки ξ поверхности нормалей лежит между обеими полярными плоскостями точек $\pm\xi$, т. е. когда точка x лежит во внутренней полости поверхности лучей, ибо в силу выпуклости этой полости всякая внутренняя точка лежит между любой парой параллельных касательных плоскостей.



Черт. 49.



Черт. 50.

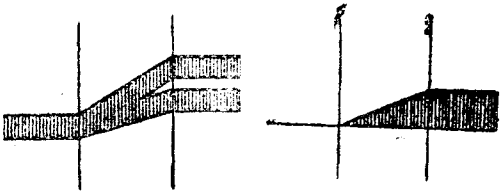
Итак, *во внутренней полости поверхности лучей функция $K(x, 1)$ постоянна. С другой стороны, функция $K(x, 1)$ должна обращаться в нуль вне наименьшей выпуклой оболочки поверхности лучей.* В самом деле, в противном случае мы можем допустить, не ограничивая общности, что $K(x, 1) > 0$ в некоторой точке $x = y$, лежащей вне этой оболочки; но тогда мы могли бы выбрать в формуле (21) начальные значения g так, чтобы функция $v(x, 0) = g(x)$ обращалась в нуль внутри выпуклой оболочки и чтобы тем не менее $v(y, 1) \neq 0$, что противоречило бы теореме о единственности гл. VI, § 4, п. 4. Точка x

лежит вне наименьшей выпуклой оболочки поверхности лучей, если обе плоскости $(x\xi) = \pm 1$ пересекают внутреннюю полость поверхности нормалей (черт. 49). Так как согласно определению $d\omega_\xi$ положительно на внешней полости поверхности нормалей и отрицательно на внутренней полости, то мы можем условие $K(x, 1) = 0$ в силу формулы (23) выразить следующим образом: интеграл от $|d\omega_\xi|$, взятый по части внешней полости поверхности нормалей, заключенной между плоскостями $(x\xi) = \pm 1$, равняется интегралу от $|d\omega_\xi|$, взятому по части внутренней полости, заключенной между теми же плоскостями. Если же плоскости $(x\xi) = \pm 1$ не пересекают внутренней полости поверхности нормалей (черт. 50), то

$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint |d\omega_\xi|,$$

где интеграл должен быть взят по частям внешней полости, лежащим между плоскостями $(x\xi) = \pm 1$, но *вне параллельных этим плоскостям касательных плоскостей к внутренней полости поверхности нормалей*. Из этой формулы следует, что $K(x, 1) > 0$, если x лежит внутри выпуклой оболочки поверхности лучей. *Таким образом, наименьшая выпуклая оболочка поверхности лучей в точности определяет область зависимости решения задачи Коши для уравнения* (19).

7. Приложение к оптике. Коническая рефракция. Если заставить свет падать нормально на плоско-параллельную кристаллическую пластинку, то внутри пластинки свет распространяется по тем лучевым направлениям, для которых направление падения света является соответствующим нормальным направлением.



Черт. 51. Черт. 52.

Так как, в общем случае, каждому нормальному направлению соответствуют *два лучевых направления*, то луч света внутри пластинки распадается на два пучка, которые, выйдя из пластинки, превращаются в два пучка, параллельных первоначальному направлению (черт. 51 и 52). Мы получим эти лучевые направления, опуская перпендикуляры на касательные плоскости поверхности нормалей, принадлежащие к направлению падения света.

В том частном случае, когда кристаллическая пластинка отшлифована параллельно оптической оси, т. е. когда направление падения проходит через какую-нибудь из четырех особых точек поверхности нормалей, то к этому нормальному направлению принадлежит бесконечное множество лучевых направлений, а именно — все направления, ведущие к различным точкам границы соответствующей крышки поверхности лучей; эти лучи образуют внутри кристалла конус; так

как крышки поверхности лучей представляют собой круги, расположенные нормально к оптической оси, то лучи, выходящие из пластинки, образуют круговой цилиндр (*коническая рефракция*).

§ 2. Области зависимости для задач высших порядков

Мы уже указали в гл. VI, § 4, п. 5, что для тотально гиперболических задач Коши в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является вероятным, что *выпуклая оболочка конуса лучей* представляет собой соответствующую область зависимости. Мы доказали это утверждение в явной форме для дифференциального уравнения (19) предыдущего параграфа, показав, таким образом, непосредственно, что для задачи Коши кристаллооптики областью зависимости действительно является выпуклая оболочка поверхности лучей. Доказательство основывалось на полученном нами интегральном выражении для решения задачи Коши

$$v(x, t) = \iiint g(\xi) K(x-\xi, t)\, d\xi$$

с ядром $K(x, t)$.

В этой связи мы можем глубже осветить тот факт, что рассматриваемые выпуклые оболочки играют роль областей зависимости, доказав следующую общую теорему относительно дифференциальных выражений, получающихся путем *композиции гиперболических дифференциальных выражений низших порядков*.

Пусть заданы два гиперболических дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[u] = 0, \quad M[v] = 0 \tag{1}$$

порядков m и n, причем оба уравнения содержат переменную времени t, а коэффициенты при $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ и соответственно $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ пусть равняются единице.

Допустим, что решения u и v, удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям

$$u = u_t = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u}{\partial t^{m-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f(x)$$

и соответственно

$$v = v_t = \ldots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial t^{n-1}} = g(x)$$

могут быть представлены в интегральной форме

$$u(x, t) = \int\limits_G \ldots \int K_1(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi;$$

$$v(x, t) = \int\limits_H \ldots \int K_2(x, \xi, t) g(\xi)\, d\xi,$$