как крышки поверхности лучей представляют собой круги, расположенные нормально к оптической оси, то лучи, выходящие из пластинки, образуют круговой цилиндр (*коническая рефракция*).

§ 2. Области зависимости для задач высших порядков

Мы уже указали в гл. VI, § 4, п. 5, что для тотально гиперболических задач Коши в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является вероятным, что *выпуклая оболочка конуса лучей* представляет собой соответствующую область зависимости. Мы доказали это утверждение в явной форме для дифференциального уравнения (19) предыдущего параграфа, показав, таким образом, непосредственно, что для задачи Коши кристаллооптики областью зависимости действительно является выпуклая оболочка поверхности лучей. Доказательство основывалось на полученном нами интегральном выражении для решения задачи Коши

$$v(x, t) = \iiint g(\xi) K(x-\xi, t)\, d\xi$$

с ядром $K(x, t)$.

В этой связи мы можем глубже осветить тот факт, что рассматриваемые выпуклые оболочки играют роль областей зависимости, доказав следующую общую теорему относительно дифференциальных выражений, получающихся путем *композиции гиперболических дифференциальных выражений низших порядков*.

Пусть заданы два гиперболических дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами

$$L[u] = 0, \quad M[v] = 0 \tag{1}$$

порядков m и n, причем оба уравнения содержат переменную времени t, а коэффициенты при $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ и соответственно $\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ пусть равняются единице.

Допустим, что решения u и v, удовлетворяющие при $t = 0$ начальным условиям

$$u = u_t = \ldots = \frac{\partial^{m-2} u}{\partial t^{m-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f(x)$$

и соответственно

$$v = v_t = \ldots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial t^{n-1}} = g(x)$$

могут быть представлены в интегральной форме

$$u(x, t) = \int\limits_G \ldots \int K_1(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi;$$

$$v(x, t) = \int\limits_H \ldots \int K_2(x, \xi, t) g(\xi)\, d\xi,$$

причем ядра K_1 и K_2 при заданных x и t обращаются в нуль вне некоторой области G и соответственно H пространства ξ, будучи внутри областей G и H всюду существенно положительными. Пусть наши выражения инвариантны относительно параллельного перемещения и пусть области G и H, соответствующие различным значениям t, подобны и подобно расположены. Обозначим через G_1 и H_1 области, соответствующие значению $t=1$, и назовем начало координат центром этих областей. Мы убедились в гл. VI, § 4, п. 5, что области G и H — выпуклые области. Это же имеет место и в том случае, когда в наших интегральных представлениях интегралы берутся не по внутренности соответствующей области, а только по ее границе, так что наши формулы содержат вместо интегралов по области интегралы по ограничивающим поверхностям.

Наша теорема гласит:

Областью зависимости D для решения дифференциального уравнения порядка $m+n$

$$ML[u]=0 \tag{2}$$

является выпуклая оболочка соединения областей G и H.

Для доказательства построим решение уравнения (2), удовлетворяющее при $t=0$ условиям:

$$u=u_t=\ldots=\frac{\partial^{m+n-2}u}{\partial t^{m+n-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial t^{m+n-1}}=f(x).$$

На основании изложенных нами раньше рассмотрений, особенно с помощью метода толчков, развитого в гл. III, § 6, п. 4, мы можем построить это решение следующим образом: положим $L[u]=v$ и найдем решение этого неоднородного уравнения, удовлетворяющее при $t=0$ однородным начальным условиям

$$u=u_t=\ldots=\frac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}=0,$$

а затем найдем решение однородного уравнения $M[v]=0$, удовлетворяющее при $t=0$ неоднородным начальным условиям:

$$v=v_t=\ldots=\frac{\partial^{n-2}v}{\partial t^{n-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{n-1}v}{\partial t^{n-1}}=f(x).$$

Чтобы решить первую задачу, мы исходим из решения задачи Коши для уравнения $L[\varphi]=0$ при начальных условиях

$$\varphi=\varphi_t=\ldots=\frac{\partial^{m-2}\varphi}{\partial t^{m-2}}=0; \qquad \frac{\partial^{m-1}\varphi(x,0)}{\partial t^{m-1}}=v(x,\tau),$$

где τ — параметр. Это решение имеет вид

$$\varphi(x,t;\tau)=\int\limits_G\ldots\int K_1(x,\xi,t)\,v(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Тогда условиям нашей первой задачи удовлетворяет функция

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau.$$

Решая теперь нашу вторую задачу, мы получим на основании наших допущений, что

$$u(x, t) = \int \ldots \int K(x, z, t) f(z)\, dz, \tag{3}$$

где

$$K(x, z, t) = \int_0^t d\tau \int \ldots \int K_1(x, \xi, t-\tau) K_2(\xi, z, \tau)\, d\xi. \tag{4}$$

Таким образом, задача Коши для составного дифференциального выражения LM решается с помощью составного ядра $K = K_1 K_2$, составленного по формуле (4) из ядер K_1 и K_2. Соответствующей областью зависимости будет та область, в которой $K > 0$, т. е. та часть пространства ξ, для которой оба множителя K_1 и K_2 отличны от нуля. В силу наших предположений достаточно рассмотреть функцию $K(0, z, t)$. Первый множитель $K_1(0, \xi, t-\tau)$ отличен от нуля, если ξ лежит внутри области, получающейся из G_1 путем увеличения всех радиусов-векторов, выходящих из точки $\xi = 0$, в $t-\tau$ раз; второй же множитель $K_2(\xi, z, \tau)$ отличен от нуля, когда z лежит внутри области H_1, увеличенной в τ раз и описанной из точки ξ как из центра. Таким образом, точка z лежит в области зависимости D, если внутри описанной из точки $\xi = 0$ как из центра области $(t-\tau) G_1$ существует такая точка ξ, что описанная из этой точки ξ как из центра область τH_1 содержит внутри себя точку z. Отсюда следует, что область D состоит из точек вида: $z = (t-\tau)\xi_1 + \tau\xi_2$, где ξ_1 пробегает область G_1, ξ_2 — область H_1, а τ изменяется от нуля до t. При фиксированных ξ_1 и ξ_2 точка z пробегает прямолинейный отрезок, соединяющий точки $t\xi_1$ и $t\xi_2$, когда τ изменяется от нуля до t. Отсюда и следует, что D является наименьшей выпуклой оболочкой соединения областей $G = tG_1$ и $H = tH_1$.

Если первоначальные области зависимости состоят только из границ областей G и H, то наши рассуждения в основном остаются без изменений; однако, оказывается, что составное ядро K положительно не только на границе, но и внутри области D. Таким образом, при композиции дифференциальных выражений теряется гюйгенсовский характер зависимости.

Так, например, дифференциальное уравнение

$$u_{tttt} - 2\Delta u_{tt} + \Delta\Delta u = 0$$

даже в случае трех пространственных переменных имеет в качестве области зависимости не только границу шара радиуса t с центром x, но и всю внутренность этого шара.

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

имеет в качестве области зависимости выпуклую оболочку обоих эллипсов, соответствующих обоим компонентам этого дифференциального уравнения.

§ 3. Обобщенный принцип Гюйгенса и продолжаемые начальные условия

При исследовании задач Коши является естественным применить следующий метод рассуждения. Для того, чтобы построить решение для значения $t=t_2$ по начальным данным в момент $t=t_0$, мы можем вместо того, чтобы непосредственно применить формулу, выражающую решение для значения $t=t_2$, включить значение $t=t_1$, промежуточное между t_0 и t_2, и поступать следующим образом.

Мы находим сначала решение при $t=t_1$ и, принимая плоскость $t=t_1$ за новую начальную плоскость, выражаем значение решения при $t=t_2$ через его значения при $t=t_1$. Компонируя оба выражения, мы получим выражение для значения решения в момент $t=t_2$ через его значения в момент $t=t_0$ и результат композиции должен совпадать с первоначальной формулой, выражающей непосредственно значения решения в момент $t=t_2$ через значения решения в момент $t=t_0$. Этот факт совпадения обеих формул Адамар назвал «*обобщенным принципом Гюйгенса*». Адамар подчеркнул, что совпадение обоих результатов приводит к важному соотношению между представляющими ядрами, и упомянутый принцип является, таким образом, источником интересных интегральных соотношений [1]).

Однако, мы здесь сталкиваемся с любопытным парадоксом, который мы разъясним на примере волнового уравнения. Мы видели в § 5, п. 3, что интегральная формула решения дает нам дважды непрерывно дифференцируемую функцию, если начальная функция u имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]+1$, а начальная производная u_t — непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$. Легко показать на простых примерах [2]), что при пони-

---

[1]) См. Bull. Soc. Math. France, т. 31, стр. 208 и т. 52, стр. 241. Аналогичные рассуждения можно впрочем проводить также и для краевой задачи.

[2]) Ограничимся доказательством того, что интегральная формула Пуассона (гл. VI, § 5) в случае $n=4$ и начальных условий вида $u(x, y, z, 0)=0$ и $u_t(x, y, z, 0)=0$, если $r\geqslant 1$, а $u_t(x, y, z, 0)=\sqrt{1-r^2}$, если $r\leqslant 1$, дает непрерывную функцию u, для которой производная по t *уже оказывается разрывной*. В самом деле, мы получаем:

$$u(0, 0, 0, t)=0, \text{ если } t\geqslant 1, \text{ и } u(0, 0, 0, t)=t\sqrt{1-t^2}, \text{ если } t\leqslant 1,$$