Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0$$

имеет в качестве области зависимости выпуклую оболочку обоих эллипсов, соответствующих обоим компонентам этого дифференциального уравнения.

§ 3. Обобщенный принцип Гюйгенса и продолжаемые начальные условия

При исследовании задач Коши является естественным применить следующий метод рассуждения. Для того, чтобы построить решение для значения $t=t_2$ по начальным данным в момент $t=t_0$, мы можем вместо того, чтобы непосредственно применить формулу, выражающую решение для значения $t=t_2$, включить значение $t=t_1$, промежуточное между t_0 и t_2, и поступать следующим образом.

Мы находим сначала решение при $t=t_1$ и, принимая плоскость $t=t_1$ за новую начальную плоскость, выражаем значение решения при $t=t_2$ через его значения при $t=t_1$. Компонируя оба выражения, мы получим выражение для значения решения в момент $t=t_2$ через его значения в момент $t=t_0$ и результат композиции должен совпадать с первоначальной формулой, выражающей непосредственно значения решения в момент $t=t_2$ через значения решения в момент $t=t_0$. Этот факт совпадения обеих формул Адамар назвал «*обобщенным принципом Гюйгенса*». Адамар подчеркнул, что совпадение обоих результатов приводит к важному соотношению между представляющими ядрами, и упомянутый принцип является, таким образом, источником интересных интегральных соотношений [1]).

Однако, мы здесь сталкиваемся с любопытным парадоксом, который мы разъясним на примере волнового уравнения. Мы видели в § 5, п. 3, что интегральная формула решения дает нам дважды непрерывно дифференцируемую функцию, если начальная функция u имеет непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]+1$, а начальная производная u_t — непрерывные производные вплоть до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$. Легко показать на простых примерах [2]), что при пони-

---

[1]) См. Bull. Soc. Math. France, т. 31, стр. 208 и т. 52, стр. 241. Аналогичные рассуждения можно впрочем проводить также и для краевой задачи.

[2]) Ограничимся доказательством того, что интегральная формула Пуассона (гл. VI, § 5) в случае $n=4$ и начальных условий вида $u(x, y, z, 0)=0$ и $u_t(x, y, z, 0)=0$, если $r\geqslant 1$, а $u_t(x, y, z, 0)=\sqrt{1-r^2}$, если $r\leqslant 1$, дает непрерывную функцию u, для которой производная по t *уже оказывается разрывной*. В самом деле, мы получаем:

$$u(0, 0, 0, t)=0, \text{ если } t\geqslant 1, \text{ и } u(0, 0, 0, t)=t\sqrt{1-t^2}, \text{ если } t\leqslant 1,$$

жении этих требований дифференцируемости, хотя бы на одну единицу, решение дифференциального уравнения может не удовлетворять условию непрерывности функции и ее первых двух производных. Таким образом, при продолжении начальных значений свойства дифференцируемости могут пропадать. Для того, чтобы иметь возможность последовательно применять процесс продолжения начальных условий, учитывая возможное нарушение требований дифференцируемости, мы должны были бы подчинить начальные значения при $t=t_0$ более сильным требованиям дифференцируемости и притом тем более сильным, чем больше число шагов, на которые мы хотим разбить продолжение решения от $t=t_0$ до $t=t_1$. Это указывает на то, что условия, налагаемые нами на начальные функции, являются слишком сильными, несмотря на то, что они не могут быть заменены требованиями дифференцируемости более низкого порядка.

Поэтому возникает задача найти такие условия дифференцируемости для начальных функций, которые сохранялись бы при продолжении решения для значений $t>t_0$. И действительно, такие «продолжаемые начальные условия» найдены. Они гласят: u_t и u_{x_i} должны быть при $t=t_0$ непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, а их производные до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$ должны существовать и иметь интегрируемый квадрат в смысле Лебега [1].

§ 4. Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями. Обобщение понятия характеристик

Нам уже часто приходилось заменять дифференциальные уравнения интегральными соотношениями, особенно в связи с теоремами о среднем значении в гл. VI. Мы можем эту идею обобщить и дать ей следующую, принципиально важную формулировку. Пусть $L[u]$ — некоторое линейное однородное дифференциальное выражение, а $M[v[$ — сопряженное с ним выражение (см. стр. 493). Ограничиваясь снова случаем дифференциальных выражений второго порядка, мы получим на основании соотношения (19), стр. 493, что между любым решением u уравнения $L[u]=0$, дважды непрерывно дифференцируемым в области G, и любой функцией v, обращающейся на границе G в нуль вместе со своими производными первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемой внутри G, включая границу, имеет место соотношение

$$\int\int_G \ldots \int uM[v]\,dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{1}$$

так что

$$u_t(0, 0, 0, t) = 0, \text{ если } t>1, \text{ и } u_t(0, 0, 0, t) = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ если } t<1.$$

[1]) См. Фридрихс и Леви, Gött. Nachr., 1932, стр. 135.