жении этих требований дифференцируемости, хотя бы на одну единицу, решение дифференциального уравнения может не удовлетворять условию непрерывности функции и ее первых двух производных. Таким образом, при продолжении начальных значений свойства дифференцируемости могут пропадать. Для того, чтобы иметь возможность последовательно применять процесс продолжения начальных условий, учитывая возможное нарушение требований дифференцируемости, мы должны были бы подчинить начальные значения при $t=t_0$ более сильным требованиям дифференцируемости и притом тем более сильным, чем больше число шагов, на которые мы хотим разбить продолжение решения от $t=t_0$ до $t=t_1$. Это указывает на то, что условия, налагаемые нами на начальные функции, являются слишком сильными, несмотря на то, что они не могут быть заменены требованиями дифференцируемости более низкого порядка.

Поэтому возникает задача найти такие условия дифференцируемости для начальных функций, которые сохранялись бы при продолжении решения для значений $t>t_0$. И действительно, такие «продолжаемые начальные условия» найдены. Они гласят: u_t и u_{x_i} должны быть при $t=t_0$ непрерывными и непрерывно дифференцируемыми, а их производные до порядка $\left[\frac{m}{2}\right]$ должны существовать и иметь интегрируемый квадрат в смысле Лебега [1].

§ 4. Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями. Обобщение понятия характеристик

Нам уже часто приходилось заменять дифференциальные уравнения интегральными соотношениями, особенно в связи с теоремами о среднем значении в гл. VI. Мы можем эту идею обобщить и дать ей следующую, принципиально важную формулировку. Пусть $L[u]$ — некоторое линейное однородное дифференциальное выражение, а $M[v[$ — сопряженное с ним выражение (см. стр. 493). Ограничиваясь снова случаем дифференциальных выражений второго порядка, мы получим на основании соотношения (19), стр. 493, что между любым решением u уравнения $L[u]=0$, дважды непрерывно дифференцируемым в области G, и любой функцией v, обращающейся на границе G в нуль вместе со своими производными первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемой внутри G, включая границу, имеет место соотношение

$$\int\int_G \ldots \int uM[v]\,dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{1}$$

так что

$$u_t(0, 0, 0, t) = 0, \text{ если } t>1, \text{ и } u_t(0, 0, 0, t) = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}, \text{ если } t<1.$$

[1]) См. Фридрихс и Леви, Gött. Nachr., 1932, стр. 135.

Обратно, если интегральное соотношение (1) имеет место для некоторой функции u и любой функции v, то из него следует, что функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[u]=0$, если функция u дважды непрерывно дифференцируема.

Итак, интегральное соотношение (1) для класса дважды непрерывно дифференцируемых функций u эквивалентно дифференциальному уравнению $L[u]=0$, сохраняя при этом смысл и для значительно более широкого класса функций u, подчиненных более слабым условиям непрерывности.

Мы рассматриваем поэтому интегральное соотношение (1) как *обобщение дифференциального уравнения*.

С помощью этого принципа мы получаем возможность осветить понятие характеристики с новой точки зрения. Мы видели в гл. VI, § 2, что разрывы первых производных решения u уравнения $L[u]=0$ могут иметь место на любой поверхности, так что мы должны ввести некоторые дополнительные ограничения для того, чтобы можно было рассматривать такие поверхности разрывов как характеристические поверхности. Однако, такие дополнительные ограничения оказываются излишними, если заменить дифференциальное уравнение $L[u]=0$ обобщенным дифференциальным уравнением (1). Для этого обобщенного дифференциального уравнения имеет, например, место следующая общая теорема: Если u является решением, дважды непрерывно дифференцируемым всюду, за исключением некоторой дважды непрерывно дифференцируемой поверхности $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$, вдоль которой внешняя относительно этой поверхности производная первого порядка имеет разрыв первого рода, то поверхность $\varphi=0$ должна быть характеристической, т. е. вдоль этой поверхности должно выполняться условие

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k=0.$$

Для доказательства мы можем ограничиться, в силу доказанной в § 2 инвариантности характеристического условия, случаем, когда поверхность разрывов совпадает с одной из плоскостей координат. Пусть, например, $\varphi=x_1$. Наша теорема сводится тогда к утверждению, что $a_{11}=0$, если $x_1=0$.

Проведем доказательство для достаточно типичного частного случая двух независимых переменных $x_1=x$ и $x_2=y$, допуская, таким образом, что некоторый кусок линии $S: y=0$ является линией разрывов рассмотренного типа.

Интегрируя соотношение (19) (стр. 493) по области G, содержащей эту линию S, мы получим тогда, обозначая через $\lambda=(u_x)$ скачок функции u_x вдоль S,

$$\int_S v\lambda a_{11}dy=0, \tag{2}$$

ибо вне S имеет место уравнение $L[u]=0$, для всей области G имеет место условие (1), а вдоль S функция u и производная u_y непрерывны. В силу произвольности значений v вдоль S и в силу того, что вдоль S скачок λ всюду отличен от нуля, мы получаем непосредственно из уравнения (2), что всюду вдоль S должно выполняться условие $a_{11}=0$, что и доказывает нашу теорему [1]).

Предлагаем читателю в виде задачи обобщить этот результат на случай многих независимых переменных, а также на разрывы другого типа и дифференциальные уравнения высших порядков.

---

[1]) См. по этому вопросу работу К. Фридрихса о применении общей теории операторов к дифференциальным операторам. Эта работа должна появиться в печати в ближайшем будущем.