Решение:

$$p_e = -A\sum_{\alpha=0}^{\infty}(2\alpha+1)\,i^\alpha\,\frac{j_\alpha(kr_0)}{h'_\alpha(kr_0)}\,h_\alpha(kr)\,P_\alpha(\cos\theta).$$

Это решение получается, если во втором уравнении (67) положить $\rho_i=\infty$ и подставить найденные из него значения коэффициентов $a_\alpha$ в ряд (65).

**2.** Показать, что когда длина волны велика по сравнению с размерами шара $V\,(kr_0\ll 1)$, то решение предыдущей задачи на большом удалении от шара $(kr\gg 1)$ может быть представлено приближенной формулой

$$p_e = -\frac{Ak^2r_0^2}{3r}\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{ikr}.$$

Указание. Следует воспользоваться приближенными выражениями для бесселевых функций при малых значениях аргумента.

## ДОПОЛНЕНИЕ К ЧАСТИ ВТОРОЙ*

# СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ОБЩЕГО ВИДА

### § 1. Общий вид уравнения эллиптического типа

В соответствии с определением, данным во введении, будем говорить, что уравнение

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha\,\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}+cu=f, \tag{1}$$

где $a_{ij}$, $b_i$, $c$ и $f$ — функции, заданные в области $V$, принадлежит в этой области *эллиптическому типу*, если квадратичная форма

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$$

сохраняет в этой области знак и не обращается в нуль.

Число $n$ является числом измерений области $V$. Ниже будут рассматриваться только трехмерные области $(n=3)$, однако результаты в равной мере приложимы как к плоским $(n=2)$, так и к многомерным $(n>3)$ областям.

Ниже будем предполагать, что функции $a_{ij}$, $b_i$, $c$ и $f$ непрерывны и, кроме того, что функции $a_{ij}$, а также функции

$$e_i \equiv b_i - \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_\beta}$$

имеют непрерывные первые производные. При последнем условии уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,a_{\alpha\beta}\,\frac{\partial u}{\partial x_\beta}+\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=f. \tag{2}$$

Дифференциальное выражение, стоящее в левой части уравнения (1) или (2), будем обозначать через $\mathcal{M}u$. При этом обозначении эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\mathcal{M}u = f. \tag{3}$$

## § 2. Основные граничные задачи

В первой части этой книги рассматривались физические величины, удовлетворявшие уравнениям гиперболического типа. Все эти величины характеризовали процессы, зависящие от времени. В связи с этим для рассматривавшихся в первом разделе уравнений была характерна задача, в которой искомая величина должна удовлетворять кроме уравнения еще *граничным* и *начальным* условиям. Мы, далее, видели, что тогда, когда процесс, описываемый в общем случае уравнением гиперболического типа, носит установившийся характер, то, вследствие обращения в нуль членов, содержащих производные по времени, он описывается уравнением эллиптического типа.

Это позволяет предполагать, что уравнения эллиптического типа естественно связаны с физическими задачами, в которых рассматриваются *установившиеся* (стационарные) состояния. В свою очередь, установившиеся состояния физических объектов естественно считать зависящими только от условий на их границах, но не от последовательности предшествовавших состояний. Решения уравнений, описывающих такие состояния, должны полностью определяться заданием одних *граничных* условий.

Чтобы выразиться точнее, заметим, что в задачах для уравнений гиперболического типа нам приходилось задавать *на границе* изучаемой области *одно* соотношение, в которое могли входить искомая функция, ее первые производные и некоторые заданные функции, а в *начальный момент времени* — два соотношения для искомой функции и ее первой производной по времени. Следовательно, мы должны ожидать, что решение уравнения эллиптического типа в частных производных 2-го порядка полностью определится заданием *одного* соотношения, относящегося к границе изучаемой области — *граничного условия*, в которое могут входить заданные функции, искомая функция и ее первые производные. Это предположение оправдывается при естественных дополнительных требованиях, относящихся к гладкости искомой функции и ее поведению на бесконечности (последнее, если решение ищется в бесконечной области). Эти требования для внутренних задач могут быть сведены к регулярности решения.

Вопроса об условиях на бесконечности мы касаться не будем, ограничив себя рассмотрением только внутренних задач. В наиболее общей форме граничная задача для уравнения эллиптического типа может быть сформулирована следующим образом: найти функции