Дифференциальное выражение, стоящее в левой части уравнения (1) или (2), будем обозначать через $\mathcal{M}u$. При этом обозначении эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\mathcal{M}u = f. \tag{3}$$

§ 2. Основные граничные задачи

В первой части этой книги рассматривались физические величины, удовлетворявшие уравнениям гиперболического типа. Все эти величины характеризовали процессы, зависящие от времени. В связи с этим для рассматривавшихся в первом разделе уравнений была характерна задача, в которой искомая величина должна удовлетворять кроме уравнения еще *граничным* и *начальным* условиям. Мы, далее, видели, что тогда, когда процесс, описываемый в общем случае уравнением гиперболического типа, носит установившийся характер, то, вследствие обращения в нуль членов, содержащих производные по времени, он описывается уравнением эллиптического типа.

Это позволяет предполагать, что уравнения эллиптического типа естественно связаны с физическими задачами, в которых рассматриваются *установившиеся* (стационарные) состояния. В свою очередь, установившиеся состояния физических объектов естественно считать зависящими только от условий на их границах, но не от последовательности предшествовавших состояний. Решения уравнений, описывающих такие состояния, должны полностью определяться заданием одних *граничных* условий.

Чтобы выразиться точнее, заметим, что в задачах для уравнений гиперболического типа нам приходилось задавать *на границе* изучаемой области *одно* соотношение, в которое могли входить искомая функция, ее первые производные и некоторые заданные функции, а в *начальный момент времени* — два соотношения для искомой функции и ее первой производной по времени. Следовательно, мы должны ожидать, что решение уравнения эллиптического типа в частных производных 2-го порядка полностью определится заданием *одного* соотношения, относящегося к границе изучаемой области — *граничного условия*, в которое могут входить заданные функции, искомая функция и ее первые производные. Это предположение оправдывается при естественных дополнительных требованиях, относящихся к гладкости искомой функции и ее поведению на бесконечности (последнее, если решение ищется в бесконечной области). Эти требования для внутренних задач могут быть сведены к регулярности решения.

Вопроса об условиях на бесконечности мы касаться не будем, ограничив себя рассмотрением только внутренних задач. В наиболее общей форме граничная задача для уравнения эллиптического типа может быть сформулирована следующим образом: найти функции а) являющиеся регулярными решениями уравнения (3) в рассматриваемой области V,

б) на границе $\mathcal{F}V$ области V удовлетворяющие граничному условию

$$\alpha \frac{du}{dl} + \beta u = \varphi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{4}$$

где α, β и φ — заданные на $\mathcal{F}V$ функции, причем $|\alpha| + |\beta| > 0$, а $\frac{d}{dl}$ означает дифференцирование по направлению l, заданному в каждой точке на $\mathcal{F}V$, в которой $\alpha \neq 0$.

В такой общей постановке граничная задача до сих пор полностью не изучена. Для математической физики наиболее важны частные граничные задачи, с которыми мы уже встречались выше. Их классификацию применительно к уравнению эллиптического типа *общего вида* целесообразно принять отличной от указанной в гл. XIX, определив их *в зависимости от вида граничного условия* следующим образом.

1. *Задача Дирихле* или *первая граничная задача*:

$$\mathcal{M}u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \qquad u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V. \tag{5}$$

2. *Задача Неймана* или *вторая граничная задача*:

$$\mathcal{M}u = f, \ \text{когда} \ x \in V - \mathcal{F}V; \quad \alpha \frac{du}{d\nu} + \beta u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{6}$$

где *коэффициент* α *не обращается в нуль на поверхности* $\mathcal{F}V$, *а* $\frac{d}{d\nu}$ означает дифференцирование по направлению конормали к $\mathcal{F}V$ (гл. XVIII, § 3),

3. *Смешанная* или *третья граничная задача*:

$$\mathcal{M}u = f, \ \text{когда} \ x \in V - \mathcal{F}V; \ \alpha \frac{du}{d\nu} + \beta u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{7}$$

где *коэффициент* α, *не обращаясь на поверхности* $\mathcal{F}V$ *в нуль тождественно, равен нулю на части* $\mathcal{F}V$.

Отметим, что при нашем новом определении граничных задач, задача Неймана, охватывает как задачу Неймана, так и, частично, смешанную граничную задачу в прежнем смысле слова.

Перечисленные граничные задачи называют *внутренними* или *внешними* в зависимости от того, ставятся ли они для области, лежащей внутри или вне конечной замкнутой поверхности $\mathcal{F}V$. В этой главе мы будем заниматься только внутренними задачами Дирихле и Неймана.

Указанную выше постановку и классификацию граничных задач распространяют также на случай двух переменных.