§ 3. Сопряженные граничные задачи

Рассмотрим граничное условие задачи Неймана:

$$\alpha \frac{du}{d\nu} + \beta u = \varphi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V \quad (\alpha \neq 0). \tag{8}$$

Умножив его на отношение $\frac{a}{\alpha}$, где величина a определена формулой (11) гл. XVIII, приведем его к виду

$$a \frac{du}{d\nu} + gu = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{9}$$

где g и ψ — известные функции. Сравнив это соотношение с первым из равенств (14) гл. XVIII, видим, что оно может быть записано в виде

$$\mathcal{P}u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V. \tag{10}$$

Граничное условие

$$Qv \equiv a \frac{dv}{d\nu} + (g - b)\, v = \tilde{\psi}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{11}$$

где дифференциальное выражение Qv определено вторым из равенств (14) гл. XVIII, а $\tilde{\psi}$ — некоторая функция, определенная на $\mathcal{F}V$, назовем *сопряженным* граничному условию (10).

Назовем далее *сопряженными* граничные задачи:

$$\mathcal{M}u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad \mathcal{P}u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V; \tag{12}$$

$$\mathcal{N}v = \tilde{f}, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad Qv = \tilde{\psi}, \quad \text{когда} \ x \in \mathcal{F}V, \tag{13}$$

где $\mathcal{M}u$ и $\mathcal{N}v$ — сопряженные дифференциальные выражения, $\mathcal{P}u$ и Qv — соответствующие им выражения, определенные равенствами (14) гл. XVIII, а f, $\tilde{f}$ и ψ, $\tilde{\psi}$ — функции, определенные соответственно в изучаемой области V и на ее границе $\mathcal{F}V$.

В случае граничной задачи Дирихле:

$$\mathcal{M}u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{14}$$

сопряженной к ней назовем задачу:

$$\mathcal{N}v = \tilde{f}, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad v = \tilde{\psi}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V.$$

Легко видеть, что свойство сопряженности *взаимно*, причем две взаимно сопряженные задачи всегда имеют аналогичные граничные условия, т. е. обе являются либо задачами Дирихле, либо задачами Неймана.

Если обе функции f и ψ тождественно равны нулю, то соответствующую задачу будем называть *однородной*. Соответственно, сопряженную задачу будем называть *однородной*, если тождественно равны нулю обе функции $\tilde{f}$ и $\tilde{\psi}$. Каждой граничной задаче сопряжена *одна однородная задача*.