§ 4. Фундаментальные решения. Функция Грина

Наряду с регулярными решениями уравнений эллиптического типа важную роль играют так называемые *фундаментальные решения*.

Фундаментальным решением уравнения: $\mathcal{M}L=0$ *называют функцию Леви* $L(\xi, x)$ (гл. XVIII, § 4), которая *при* $\xi \neq x$ *удовлетворяет этому уравнению по координатам одной из точек* (x *или* ξ) *и зависит от координат другой точки, как от параметров*. Будем писать $\mathcal{M}_\xi L$ или $\mathcal{M}_x L$ в зависимости от того, рассматриваем ли мы как переменные, по которым производится дифференцирование, координаты точки ξ или x. Выражения $\mathcal{M}_x u$ и $\mathcal{M}_\xi u$ будем понимать как $\mathcal{M}_x u(x)$ и $\mathcal{M}_\xi u(\xi)$.

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\mathcal{M}_x u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \quad u(x) = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{15}$$

где f и ψ — непрерывные функции.

Предположим, что как решение $u(x)$ задачи (15), так и функция Леви $L(\xi, x)$ дифференциального выражения $\mathcal{M}_x u$ непрерывны в замкнутой области V вместе со своими первыми производными. Применив к функции $u(x)$ формулу Грина — Стокса (39), гл. XVIII, получим

$$u(x) = \iint\limits_{\mathcal{F}V} (L\mathcal{P}_\xi u - \psi Q_\xi L)\, dS_\xi - \iiint\limits_V (Lf - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi. \tag{16}$$

Если существует фундаментальное решение однородной задачи:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in V - \mathcal{F}V - x; \\ &G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathcal{F}V, \quad x \in V - \mathcal{F}V, \end{aligned} \tag{17}$$

сопряженной задаче Дирихле (15), и если это решение непрерывно в области V вместе со своими первыми производными, то мы можем положить $L(\xi, x) = G(\xi, x)$. При этом формула (16) примет вид

$$u(x) = -\iint\limits_{\mathcal{F}V} \psi(\xi)\, Q_\xi G(\xi, x)\, dS_\xi - \iiint\limits_V f(\xi)\, G(\xi, x)\, dV_\xi. \tag{18}$$

Таким образом, если существует решение задачи Дирихле (15) и фундаментальное решение однородной сопряженной задачи, причем в области V эти решения непрерывны вместе со своими частными производными по координатам точки ξ, то *решение задачи* (15) *можно заменить отысканием фундаментального решения однородной сопряженной задачи, после чего решение задачи* (15) *определится формулой* (18). *Эта идея лежит в основе способа Грина решения задач Дирихле.*

Фундаментальное решение однородной задачи (17) *называют функцией Грина задачи Дирихле* (15).

Аналогичным путем вводится функция Грина для задачи Неймана. Рассмотрим задачу:

$$\mathscr{M}_x u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathscr{F}V; \quad \mathscr{P}u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathscr{F}V. \tag{19}$$

Предположив, что $u(x)$ — решение этой задачи, непрерывное в замкнутой области V со своими производными первого порядка, применим формулу Грина—Стокса, что даст:

$$u(x) = \iint\limits_{\mathscr{F}V} (L\psi - uQ_\xi L)\, dS_\xi - \iiint\limits_V (Lf - v\mathscr{N}_\xi L)\, dV_\xi.$$

Пусть $G(\xi, x)$ — фундаментальное решение однородной задачи

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_\xi G(\xi, x) &= 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in V - \mathscr{F}V - x; \\ Q_\xi G(\xi, x) &= 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathscr{F}V, \quad x \in V - \mathscr{F}V, \end{aligned} \tag{20}$$

сопряженной задаче (19). Если это решение непрерывно в области V вместе со своими первыми производными, то, положив $L(\xi, x) = G(\xi, x)$, получим:

$$u(x) = \iint\limits_{\mathscr{F}V} \psi(\xi)\, G(\xi, x)\, dS_\xi - \iiint\limits_V f(\xi)\, G(\xi, x)\, dV_\xi. \tag{21}$$

Таким образом, если *функция* $G(\xi, x)$ *каким-либо образом найдена и удовлетворяет необходимым требованиям гладкости, то решение задачи* (19), *непрерывное вместе со своими первыми производными в замкнутой области* V, *может быть найдено с помощью формулы* (21).

Фундаментальное решение задачи (20) *называют функцией Грина задачи* (19). Употребительны также названия *вторая функция Грина* и *характеристическая функция Неймана.*

Рассмотрим две взаимно сопряженные граничные задачи и предположим, что их функции Грина $G(\xi, x)$ и $\tilde{G}(\xi, x)$ существуют. По определению:

$$\mathscr{M}_\xi \tilde{G}(\xi, x) = 0, \quad \mathscr{N}_\xi G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in V - \mathscr{F}V - x, \tag{22}$$

$$G(\xi, x) = 0, \quad G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad \xi \in \mathscr{F}V, \quad x \in V - \mathscr{F}V, \tag{23}$$

или

$$\mathscr{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x) = 0, \; Q_\xi G(\xi, x) = 0, \; \text{когда} \; \xi \in \mathscr{F}V, \; x \in V - \mathscr{F}V. \tag{24}$$

Первое граничное условие выполняется для задач Дирихле, второе — для задач Неймана.

Предположим далее, что функции $G(\xi, x)$ и $\tilde{G}(\xi, x)$ имеют производные первого порядка по координатам точки ξ, непрерывные в области $V - x$. Тогда, фиксировав две точки $x = x'$ и $x = x''$ $(x' \neq x'')$, мы можем применить формулу Грина (15) гл. XVIII к функциям $G(\xi, x')$ и $G(\xi, x'')$ в области $V - V_1(x', \rho) - V_1(x'', \rho)$, где $V_1(x', \rho)$ и $V_1(x'', \rho)$ — эллипсоидальные окрестности точек

x' и x'', определенные неравенствами вида (27) гл. XVIII. Приняв во внимание соотношения (22)—(24), получим

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x',\rho)+\mathcal{F}V_1(x'',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = 0.$$

Перейдем к пределу при $\rho \to 0$. Заметив, что в силу соображений, высказанных при выводе формулы Грина—Стокса (гл. XVIII, § 5), справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = -\tilde{G}(x', x''),$$

$$\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x'',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = G(x'', x'),$$

получим формулу

$$\tilde{G}(x', x'') = G(x'', x'), \tag{25}$$

связывающую функции Грина сопряженных граничных задач. В частности, если дифференциальное выражение *$\mathcal{M}u$ самосопряженное*, то $\tilde{G}(\xi, x) = G(\xi, x)$, и из формулы (25) следует, что при этом

$$G(x', x'') = G(x'', x'). \tag{26}$$

Таким образом, если для самосопряженной граничной задачи, поставленной в области V, существует функция Грина $G(\xi, x)$, непрерывная в области $V - x$ вместе со своими первыми производными, то эта функция симметрична относительно точек ξ и x.

§ 5. Теоремы единственности

Положив в формуле Грина (15) гл. XVIII $v = 1$ и $u = w^2$, после несложных выкладок придем к соотношению:

$$\iiint\limits_V \left(w\mathcal{M}w + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \frac{\partial w}{\partial x_\beta} \right) dV = \iiint\limits_V \left(c - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) w^2\, dV + \iint\limits_{\mathcal{F}V} w\mathcal{P}w\, dS + \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left(\frac{b}{2} - g \right) w^2\, dS. \tag{27}$$

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Дирихле:

$$\mathcal{M}u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{28}$$