x' и x'', определенные неравенствами вида (27) гл. XVIII. Приняв во внимание соотношения (22)—(24), получим

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x',\rho)+\mathcal{F}V_1(x'',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = 0.$$

Перейдем к пределу при $\rho \to 0$. Заметив, что в силу соображений, высказанных при выводе формулы Грина—Стокса (гл. XVIII, § 5), справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = -\tilde{G}(x', x''),$$

$$\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}V_1(x'',\rho)} [G(\xi, x')\mathcal{P}_\xi \tilde{G}(\xi, x'') - \tilde{G}(\xi, x'') Q_\xi G(\xi, x')]\, dS_\xi = G(x'', x'),$$

получим формулу

$$\tilde{G}(x', x'') = G(x'', x'), \tag{25}$$

связывающую функции Грина сопряженных граничных задач. В частности, если дифференциальное выражение $\mathcal{M}u$ *самосопряженное*, то $\tilde{G}(\xi, x) = G(\xi, x)$, и из формулы (25) следует, что при этом

$$G(x', x'') = G(x'', x'). \tag{26}$$

Таким образом, если для самосопряженной граничной задачи, поставленной в области V, существует функция Грина $G(\xi, x)$, непрерывная в области $V - x$ вместе со своими первыми производными, то эта функция симметрична относительно точек ξ и x.

§ 5. Теоремы единственности

Положив в формуле Грина (15) гл. XVIII $v = 1$ и $u = w^2$, после несложных выкладок придем к соотношению:

$$\iiint\limits_V \left(w\mathcal{M}w + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}\right) dV = \iiint\limits_V \left(c - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) w^2\, dV + \iint\limits_{\mathcal{F}V} w\mathcal{P}w\, dS + \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left(\frac{b}{2} - g\right) w^2\, dS. \tag{27}$$

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Дирихле:

$$\mathcal{M}u = f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{28}$$

удовлетворяющие требованиям, при которых справедлива формула Грина. Разность $w=u_1-u_2$ этих решений явится решением однородной задачи Дирихле:

$$\mathscr{M}w=0, \quad \text{когда} \quad x\in V-\mathscr{F}V; \quad w=0, \quad \text{когда} \quad x\in\mathscr{F}V,$$

удовлетворяющей тем же требованиям. Применив к разности w формулу (27), получим:

$$\iiint\limits_V \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}dV=\iiint\limits_V\left(c-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)w^2\,dV. \qquad (29)$$

Левая часть этого соотношения неотрицательна в силу неравенства

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta>0 \quad \text{при} \quad \sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha^2>0.$$

Если

$$c-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\leqslant 0, \qquad (30)$$

то правая часть неположительна, так что равенство (29) возможно только при условии, что обе его части равны нулю. Ввиду непрерывности функции w и нулевого граничного условия отсюда следует, что в области V функция $w=0$, т. е. $u_1=u_2$.

Таким образом, *задача Дирихле при соблюдении условия* (30) *имеет не более одного решения*, непрерывного в области вместе со своими производными первого порядка.

Проводя доказательство этой теоремы единственности другим путем, можно показать, что требование непрерывности производных решения в замкнутой области V является излишним, достаточно требовать непрерывности самого решения.

Рассмотрим задачу Неймана:

$$\mathscr{M}u=f, \quad \text{когда} \quad x\in V-\mathscr{F}V; \quad \mathscr{P}u=\psi, \quad \text{когда} \quad x\in\mathscr{F}V. \qquad (31)$$

Предположим, что u_1 и u_2 — два решения задачи, удовлетворяющие требованиям, при которых к ним может быть применена формула Грина. Разность $w=u_1-u_2$ явится решением однородной задачи:

$$\mathscr{M}w=0, \text{ когда } x\in V-\mathscr{F}V; \ \mathscr{P}w=a\frac{dw}{d\nu}+gw=0, \text{ когда } x\in\mathscr{F}V. \qquad (32)$$

Применив к разности w формулу (27), получим

$$\iiint\limits_V \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_\beta}dV=\iiint\limits_V\left(c-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)w^2\,dV+$$
$$+\iint\limits_{\mathscr{F}V}\left(\frac{b}{2}-g\right)w^2\,dS. \qquad (33)$$

Если

$$c-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\leqslant 0, \qquad \frac{b}{2}-g\leqslant 0, \tag{34}$$

то, как легко видеть из этого интегрального соотношения, должно быть

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \quad \text{когда} \quad x\in V, \tag{35}$$

в силу чего задача (32) примет вид:

$$\mathcal{M}w=cw=0, \text{ когда } x\in V-\mathcal{F}V; \ \mathcal{P}w=gw=0, \text{ когда } x\in\mathcal{F}V.$$

Отсюда следует, что если при выполнении неравенств (34) хотя бы одна из функций g и c неравна нулю тождественно, то $w=0$. Из соотношения (33), в силу непрерывности функции w, также следует, что $w=0$, если хотя бы одно из неравенств (34) является точным. Если же ни одно из этих дополнительных условий не имеет места, то из соотношения (35) вытекает, что $w=\text{const}$.

Таким образом, задача Неймана при $g\neq 0$ и выполнении условий (34) имеет не более одного решения, непрерывного в области V вместе со своими производными 1-го порядка. При $g=0$ решения задачи Неймана не могут отличаться более, чем на постоянное слагаемое. Если хотя бы одно из неравенств (34) является точным, либо функция c отлична от тождественного нуля, то эта постоянная равна нулю.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если задача Дирихле имеет не более одного решения, допускающего применение формулы Грина, то и сопряженная ей задача имеет не более одного такого решения.

2. Показать, что самосопряженная задача Дирихле имеет не более одного решения, допускающего применение формулы Грина, если $c\leqslant 0$, а самосопряженная задача Неймана, если, кроме того, $g>0$.

§ 6. Условия разрешимости граничных задач

До сих пор мы рассматривали граничные задачи в предположении, что их решения, притом удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям, *существуют*. Доказательство *существования* решений граничных задач представляет весьма сложную проблему, которая требует развития специального математического аппарата, далеко выходящего за рамки обычно применяемого при изучении конкретных физических приложений. Вследствие этого, за исключением некоторых условий разрешимости, вытекающих непосредственно из формулы Грина, мы ограничимся лишь изложением основных результатов, относящихся к существованию решений граничных задач, опуская доказательства.