Если

$$c-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\leqslant 0, \qquad \frac{b}{2}-g\leqslant 0, \tag{34}$$

то, как легко видеть из этого интегрального соотношения, должно быть

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \quad \text{когда} \quad x\in V, \tag{35}$$

в силу чего задача (32) примет вид:

$$\mathscr{M}w=cw=0, \text{ когда } x\in V-\mathscr{F}V; \ \mathscr{P}w=gw=0, \text{ когда } x\in\mathscr{F}V.$$

Отсюда следует, что если при выполнении неравенств (34) хотя бы одна из функций g и c неравна нулю тождественно, то $w=0$. Из соотношения (33), в силу непрерывности функции w, также следует, что $w=0$, если хотя бы одно из неравенств (34) является точным. Если же ни одно из этих дополнительных условий не имеет места, то из соотношения (35) вытекает, что $w=\text{const}$.

Таким образом, задача Неймана при $g\neq 0$ и выполнении условий (34) имеет не более одного решения, непрерывного в области V вместе со своими производными 1-го порядка. При $g=0$ решения задачи Неймана не могут отличаться более, чем на постоянное слагаемое. Если хотя бы одно из неравенств (34) является точным, либо функция c отлична от тождественного нуля, то эта постоянная равна нулю.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если задача Дирихле имеет не более одного решения, допускающего применение формулы Грина, то и сопряженная ей задача имеет не более одного такого решения.

2. Показать, что самосопряженная задача Дирихле имеет не более одного решения, допускающего применение формулы Грина, если $c\leqslant 0$, а самосопряженная задача Неймана, если, кроме того, $g>0$.

§ 6. Условия разрешимости граничных задач

До сих пор мы рассматривали граничные задачи в предположении, что их решения, притом удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям, *существуют*. Доказательство *существования* решений граничных задач представляет весьма сложную проблему, которая требует развития специального математического аппарата, далеко выходящего за рамки обычно применяемого при изучении конкретных физических приложений. Вследствие этого, за исключением некоторых условий разрешимости, вытекающих непосредственно из формулы Грина, мы ограничимся лишь изложением основных результатов, относящихся к существованию решений граничных задач, опуская доказательства.

Пусть u — решение задачи Дирихле:

$$\mathcal{M}u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; u = \psi, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{36}$$

непрерывное в области V вместе со своими первыми производными, а v — какое-либо решение однородной сопряженной задачи:

$$\mathcal{N}v = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; v = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{37}$$

удовлетворяющее этому же условию. Функции f и ψ будем считать непрерывными. При этих предложениях мы можем применить формулу Грина (15) гл. XVIII. Произведя в ней подстановки в соответствии с уравнениями (36) и (37), получим

$$\iiint\limits_V fv\, dV + \iint\limits_{\mathcal{F}V} v\psi \frac{dv}{d\nu} = 0. \tag{38}$$

Подобным же путем, для задачи Неймана:

$$\mathcal{M}u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; \mathcal{P}u = \psi, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V,$$

получим:

$$\iiint\limits_V fv\, dV - \iint\limits_{\mathcal{F}V} v\psi\, dS = 0, \tag{39}$$

где v — решение однородной сопряженной задачи:

$$\mathcal{N}v = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; \mathcal{P}v = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{40}$$

непрерывное в области V вместе со своими первыми производными.

Таким образом, в отношении решений граничных задач, допускающих применение формулы Грина, приходим к следующей альтернативе: *либо решения однородных сопряженных задач, непрерывные в рассматриваемой области вместе со своими производными первого порядка, тождественно равны рулю, либо граничные задачи разрешимы лишь при выполнении соответствующего условия* (38) *или* (39).

Рассматриваемое свойство тесно связано с условиями единственности. Действительно, если неоднородная граничная задача имеет не более одного решения, то, как мы видели в предыдущем параграфе, решение соответствующей ей однородной задачи тождественно равно нулю. Поэтому единственность решения задачи, сопряженной рассматриваемой граничной задаче, влечет за собой обращение в нуль функции v и тождественнсе удовлетворение соответствующего условия (38) или (39). В частности, если самосопряженная задача имеет не более одного решения, то условие (38) или (39) выполняется тождественно.

Представляет большой интерес случай, когда теорема единственности не имеет места. Прежде чем сформулировать относящиеся сюда результаты, напомним формулировку *условия Гёль-*

дера. Будем говорить, что функция φ удовлетворяет этому условию в области V, если отношение

$$\frac{|\varphi(x')-\varphi(x'')|}{r^{\lambda}},$$

где r — расстояние между точками x' и x'', а λ — некоторое положительное число, ограничено при любом выборе точек $x', x'' \in V$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение эллиптического типа

$$\mathcal{M}u \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f, \tag{41}$$

коэффициенты которого a_{ij}, e_i, c $(i, j = 1, 2, 3)$ и свободный член f определены в замкнутой области V, причем первые производные коэффициентов a_{ij} и e_i и коэффициент c непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера в области V, а свободный член f — непрерывен в области V и удовлетворяет условию Гёльдера в области $V - \mathcal{F}V$.

При этих условиях и дополнительном условии $c \leqslant 0$ *задача Дирихле*

$$\mathcal{M}u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = \psi, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V \tag{42}$$

имеет решение, и притом единственное, если функция ψ *непрерывна на границе* $\mathcal{F}V$. *Если выполнено условие* (30), *то задача Дирихле* (42) *и сопряженная ей задача*

$$\mathcal{N}u = \tilde{f}, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = \tilde{\psi}, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V,$$

где функция $\tilde{f}$ и $\tilde{\psi}$ обладают теми же свойствами, что и функции f и ψ соответственно, *имеют единственное решение*.

Если коэффициент $c > 0$, то имеет место следующая *альтернатива: либо однородные взаимно сопряженные задачи*

$$\mathcal{M}u = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \quad u = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{43}$$

$$\mathcal{N}v = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \quad v = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{44}$$

обе не имеют решений, отличных от тождественного нуля, и тогда задача Дирихле (42) *имеет единственное решение, либо эти задачи имеют по одинаковому числу* m *линейно-независимых решений* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *и* $v_1, v_2, \ldots, v_m$, *и тогда задача Дирихле* (42) *разрешима только при выполнении интегральных соотношений вида* (38) *для каждого из решений* $v_1, v_2, \ldots, v_m$. *Когда последнее условие выполнено, задача Дирихле имеет бесчисленное множество решений. Если* u — *одно из них, то все остальные могут быть представлены в виде* $u + \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha u_\alpha$, где c_α — *постоянные*.

Последнее замечание показывает, что решение u задачи Дирихле, *ортогональное ко всем решениям* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ однородной задачи (43), *единственно.* Действительно, пусть решение u удовлетворяет условиям ортогональности:

$$\iiint\limits_V u u_i \, dV = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Любое другое решение $\tilde{u}$ задачи, согласно сказанному, представимо в виде

$$\tilde{u} = u + \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha u_\alpha.$$

Но хотя бы при одном коэффициенте $c_i \neq 0$, интеграл

$$\iiint\limits_V \tilde{u} u_i \, dV = c_i \iiint\limits_V u_i^2 \, dV$$

отличен от нуля, из чего и вытекает высказанное утверждение.

Если область V *достаточно мала*, то задача Дирихле (42) всегда имеет единственное решение.

Перейдем теперь к формулировке условий существования функции Грина задачи Дирихле.

Если задача Дирихле (42) *имеет единственное решение* $u(x)$, *то существует функция Грина* $G(\xi, x)$ *этой задачи и справедлива формула (18):*

$$u(x) = -\iint\limits_{\mathscr{F}V} \psi(\xi) \, Q_\xi(\xi, x) \, dS_\xi - \iiint\limits_V f(\xi) \, G(\xi, x) \, dV_\xi.$$

Если решение задачи Дирихле существует, но не единственно, то все же можно построить такую функцию $G(\xi, x)$, *называемую обобщенной функцией Грина, что решение также представимо формулой* (18). *Эта функция определяется неоднозначно. Например, за обобщенную функцию Грина может быть принято фундаментальное решение граничной задачи*

$$\mathscr{M}_x G(\xi, x) = \sum_{\alpha=1}^{m} v_\alpha(\xi) \, v_\alpha(x), \text{ когда } x \in V - \mathscr{F}V; \tag{45}$$
$$G(\xi, x) = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathscr{F}V,$$

удовлетворяющее дополнительному требованию ортогональности:

$$\iiint\limits_V u_i(\xi) \, G(\xi, x) \, dV_\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{46}$$

При этом функция $u(x)$, *определенная формулой* (18), *явится решением, ортогональным всем решениям* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *однородной задачи* (43). Как указывалось, *такое решение единственно.*

Результаты, аналогичные изложенным, имеют место и для задачи Неймана:

$$\mathcal{M}u = f, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; \mathcal{P}u = a\frac{du}{d\nu} + gu = \psi, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{47}$$

при условии, что функции ψ и g непрерывны на $\mathcal{F}V$.

Если $c \leqslant 0$, $g > 0$ *или* $c < 0$, $g \geqslant 0$, *то задача* (47) *имеет единственное решение. Если же соблюдены неравенства* (34) *и хотя бы одна из функций* c *и* g *не равна тождественно нулю, то задача* (47) *и сопряженная ей задача с непрерывным граничным условием имеют одно и только одно решение.*

Если указанные условия не выполнены, то имеет место следующая альтернатива: *либо однородные сопряженные задачи*

$$\mathcal{M}u = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; \mathcal{P}u = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{48}$$

$$\mathcal{N}v = 0, \text{ когда } x \in V - \mathcal{F}V; \; Qv = 0, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V, \tag{49}$$

не имеют решений, отличных от тождественного нуля, и тогда задача (47) *имеет единственное решение, либо эти задачи имеют по одинаковому числу* m *линейно-независимых решений* $u_1, u_2, \ldots, u_m$ *и* $v_1, v_2, \ldots, v_m$, *и тогда задача* (47) *разрешима только при выполнении интегральных соотношений вида* (39) *для каждого из решений* $v_1, v_2, \ldots, v_m$. *Когда последнее условие выполнено, задача* (47) *имеет бесчисленное множество решений, причем все они могут быть представлены в виде* $u + \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha u_\alpha$, *где* c_α *— постоянные, а* u *— какое-либо решение задачи* (47). *Решение* u, *ортогональное всем функциям* u_i, *при этом единственно.*

Если $c = 0$, $g = 0$, то $m = 1$, $u_1 = \text{const}$, и решение задачи (47) определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Что касается функции Грина задачи (47), то она *существует всегда, когда решение задачи* (47) *единственно*, причем это решение представимо с помощью формулы (21). Если единственность решения не имеет места, то решения задачи (47) также могут быть представлены в виде (21) с помощью надлежащим образом определенных *обобщенных функций Грина.*