необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям*. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) *решение должно существовать*, 2) *решение должно быть единственным* и 3) *решение должно быть устойчивым*. Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

Глава I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться*, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

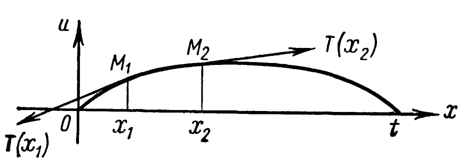

Рис. 1

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox.

Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u(x, t)$, а также производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны (см. рис. 1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она была уже подвергнута в положении равновесия. Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x, т. е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ox всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou, тогда

$$T(x_1) \cos \alpha (x_1) - T(x_2) \cos \alpha (x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x. В силу малости колебаний

$$\cos \alpha (x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha (x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что величина натяжения T не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t.

Перейдем к выводу уравнения колебаний струны. Для этого воспользуемся принципом Даламбера, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешней силы, направленной параллельно оси Ou, и силы инерции.

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0 [\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)],$$

но вследствие наших предположений

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно,

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx,$$

окончательно получим

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx. \qquad (1)$$

Обозначим через $p(x, t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t)\,dx. \qquad (2)$$

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx. \qquad (3)$$

Сумма проекций (1)—(3) на ось Ou всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны, должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t)\right] dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т. е.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \qquad (4)$$

Это есть искомое *уравнение колебаний струны.*

Если $\rho = \text{const}$, т. е. в случае однородной струны, уравнение (4) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}. \tag{6}$$

Если внешняя сила отсутствует, то $p(x, t) = 0$ и получаем уравнение *свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Уравнение (4) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (4) недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Так, в начальный момент времени $t = 0$ нужно задать положение и скорость всех точек струны

$$u\,|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{8}$$

Условия (8) называются *начальными условиями.*

Далее, так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах должно быть

$$u\,|_{x=0} = 0, \quad u\,|_{x=l} = 0 \tag{9}$$

при всяком $t \geqslant 0$. Условия (9) называются *краевыми или граничными условиями* Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: *найти решение уравнения* (4), *которое удовлетворяло бы начальным условиям* (8) *и граничным условиям* (9).

Можно рассматривать колебания *полубесконечной* или *бесконечной* струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба эти случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй — рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u\,|_{x=0} = 0$, а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leqslant x < \infty$ или для всех $-\infty < x < \infty$.