§ 2. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку.

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xOy и занимает некоторую область D, ограниченную замкнутой кривой L. Далее предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. Это означает, что если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина силы, действующая на элемент ds линии, будет равна Tds.

Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости xOy, параллельно оси Ou. Тогда смещение u точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t.

Рассматривая далее только малые колебания мембраны, будем считать, что функция $u(x, y, t)$, а также ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (σ) мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l'. Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \approx \iint\limits_{\sigma} dx\, dy = \sigma.$$

Таким образом, при наших предположениях можно пренебречь изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний и считать, что любой участок σ' мембраны будет находиться под действием первоначального натяжения T.

Перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний мембраны. Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l' равномерно распределенное натяжение T, лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось Ou сил натяжения, приложенных к кривой l', ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через ds' элемент дуги кривой l'. На этот элемент действует натяжение, равное по величине Tds'. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью Ou, очевидно, равен, в силу наших предположений, $\frac{\partial u}{\partial n}$, где n — направление внешней нормали к кривой l, ограничивающей участок σ мембраны в положении равновесия (рис. 2). Отсюда следует, что проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных к элементу ds' контура l', равна

$$T \frac{\partial u}{\partial n} ds'$$

и, стало быть, проекция на ось Ou сил натяжения, приложенных ко всему контуру l', равна

$$T \int\limits_{l'} \frac{\partial u}{\partial n} ds'. \qquad (10)$$

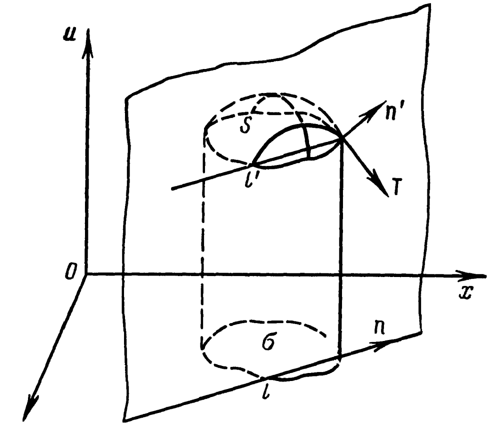

Рис. 2

Так как при малых колебаниях мембраны можно считать $ds \approx ds'$, то мы можем в интеграле (10) путь интегрирования l' заменить на l. Тогда, применяя формулу Грина, получим

$$T \int\limits_{l} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\, dy. \qquad (11)$$

Предположим далее, что на мембрану параллельно оси Ou действует внешняя сила $p(x, y, t)$, рассчитанная на единицу площади. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок σ' мембраны, будет равна

$$\iint\limits_{\sigma} p(x, y, t)\, dx\, dy. \qquad (12)$$

Силы (11) и (12) должны в любой момент времени t уравновешиваться силами инерции участка σ' мембраны

$$-\iint\limits_{\sigma} \rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx\, dy,$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\iint\limits_{\sigma} \left[\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t) \right] dx\, dy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки σ следует, что

$$\rho(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t). \qquad (13)$$

Это есть дифференциальное уравнение *поперечных колебаний мембраны.*

В случае однородной мембраны $\rho = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \tag{14}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}. \tag{15}$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $p(x, y, t) = 0$, то из (14) получаем уравнение *свободных колебаний однородной мембраны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{16}$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (13) недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \tag{17}$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть

$$u\big|_L = 0 \tag{18}$$

при любом $t \geqslant 0$.

§ 3. Уравнения гидродинамики и звуковых волн

1. В гидродинамике жидкость или газ* рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Поэтому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться объем достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с молекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Пусть жидкость движется со скоростью $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, проекции которой на оси координат обозначим $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$.

---

* В дальнейшем мы будем говорить для краткости только о жидкости, имея в виду как жидкости, так и газы