В случае однородной мембраны $\rho = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \tag{14}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}. \tag{15}$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $p(x, y, t) = 0$, то из (14) получаем уравнение *свободных колебаний однородной мембраны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{16}$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (13) недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать смещение и скорость ее точек в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \tag{17}$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть

$$u|_L = 0 \tag{18}$$

при любом $t \geqslant 0$.

§ 3. Уравнения гидродинамики и звуковых волн

1. В гидродинамике жидкость или газ* рассматривается как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Поэтому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться объем достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с молекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Пусть жидкость движется со скоростью $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, проекции которой на оси координат обозначим $\mathbf{v}_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$.

---

* В дальнейшем мы будем говорить для краткости только о жидкости, имея в виду как жидкости, так и газы

Подчеркнем, что $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке (x, y, z) пространства в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к термодинамическим величинам $p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$.

Если поле вектора скорости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ известно, то траектории отдельных частиц жидкости будут определяться уравнениями

$$\frac{dx}{dt}=v_x(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt}=v_y(x, y, z, t),$$
$$\frac{dz}{dt}=v_z(x, y, z, t).$$

Отсюда легко можно найти ускорение частицы жидкости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\\ &=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{dv_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z,\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z,\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

В каждый момент времени и в каждой точке жидкость находится в некотором состоянии термодинамического равновесия, определяемого давлением $p(x, y, z, t)$, плотностью $\rho(x, y, z, t)$, температурой $T(x, y, z, t)$, энтропией $S(x, y, z, t)$ и внутренней энергией $E(x, y, z, t)$. Из термодинамики известно, что для каждой данной среды независимы только два из параметров p, ρ, T, S и E. Величины p, T и E можно рассматривать как функции от ρ и S.

Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике. Рассмотрим некоторый объем жидкости V, ограниченный поверхностью S. Если внутри объема V нет источников и стоков, то изменение в единицу времени массы жидкости, заключенной внутри V, равно потоку жидкости через поверхность S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\, dV=-\iint\limits_S \rho v_n\, ds,$$

где v_n — проекция $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ на внешнюю нормаль к поверхности S. Преобразуя правую часть по формуле Остроградского и дифференцируя по t под знаком интеграла в левой части, получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV=-\iiint\limits_V \operatorname{div} \rho\bar{v}\, dV,$$

или

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v}\right) dV = 0,$$

где

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z}.$$

Так как последнее равенство справедливо для любого объема внутри жидкости, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \tag{20}$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности*.

Перейдем теперь к выводу уравнений движения идеальной жидкости.

Под идеальной жидкостью будем понимать такую сплошную среду, в которой внутренние силы — находится ли среда в состоянии равновесия или движения — приводятся к давлению, так что если выделить в этой жидкости некоторый объем V, ограниченный поверхностью S, то действие на него остальной части жидкости приводится к силе, направленной в каждой точке поверхности S по внутренней нормали. Обозначим величину этой силы, отнесенную на единицу площади (давление), через $p(x, y, z, t)$.

Таким образом, равнодействующая сил давления, приложенных к поверхности S, равна

$$-\iint\limits_S p\mathbf{n}\,dS,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. На основании формулы Остроградского имеем

$$-\iint\limits_S p\mathbf{n}\,dS = -\iiint\limits_V \operatorname{grad} p\,dV$$

Пусть далее на жидкость действует внешняя сила $\mathbf{F}\,(F_x, F_y, F_z)$, рассчитанная на единицу массы, так что равнодействующая этих сил, приложенных к объему V, равна

$$\iiint\limits_V \rho \mathbf{F}\,dV.$$

Наконец, равнодействующая сил инерции, действующих на жидкость в объеме V, будет

$$-\iiint\limits_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dV,$$

где $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ — вектор ускорения частицы жидкости. Здесь производная $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Это подчеркивается обозначением $\frac{d}{dt}$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}$.

Применяя принцип Даламбера, получим

$$\iiint\limits_V \left(\rho\mathbf{F} - \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{grad} p\right) dV = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объема V следует, что

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{21}$$

или, в силу (19), в скалярной форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Это есть *уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера.*

Итак, для пяти неизвестных функций v_x, v_y, v_z, ρ и p мы имеем всего четыре уравнения (20) и (21′). Чтобы получить еще одно уравнение, будем считать, что движение жидкости происходит адиабатически. При адиабатическом движении энтропия каждой частицы жидкости остается постоянной (хотя может меняться от частицы к частице) при перемещении последней в пространстве т. е. $\frac{dS}{dt} = 0$, где полная производная по времени означает, как и в (21), изменение энтропии определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Эту производную можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}v_x + \frac{\partial S}{\partial y}v_y + \frac{\partial S}{\partial z}v_z = 0$$

Это есть уравнение, выражающее собой адиабатичность движения идеальной жидкости В частном случае может оказаться, что в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках жидкости, тогда она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. В этом случае уравнение адиабатичности можно писать просто в виде

$$S = S_0 = \text{const}.$$

Такое движение жидкости называют *изэнтропическим*. При этом

$$p = f(\rho, S_0) = f(\rho). \tag{22}$$

Таким образом, мы имеем пять уравнений: уравнение неразрывности (20), три уравнения движения идеальной жидкости (21′) и уравнение (22). Эти уравнения содержат как раз пять неизвестных функций: v_x, v_y, v_z, ρ и p.

2. *Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости или газе называют звуковыми волнами.* В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\mathbf{v}$ в ней мала, так что в уравнениях Эйлера (21′) можно пренебречь членами $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x\right)$ и т. д. По той же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Положим

$$p = p_0 + \bar{p}, \quad \rho = \rho_0 + \bar{\rho}, \tag{23}$$

де ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а $\bar{\rho}$ и $\bar{p}$ — их изменения в звуксвой волне ($\bar{\rho} \ll \rho_0$, $\bar{p} \ll p_0$); $\bar{p}$ — называют звуковым давлением.

Уравнение непрерывности (20) при подстановке в него (23) и пренебрежении малыми величинами второго порядка $\left(\bar{\rho}, \bar{p}, \mathbf{v}, \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \ldots\right.$ и т. д. надо при этом считать малыми величинами первого порядка$\left.\right)$ примет вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

или, полагая

$$s = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{24}$$

Уравнения Эйлера (21′), считая, что внешние силы отсутствуют, в том же приближении сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \bar{p}. \tag{25}$$

Уравнения (24) и (25) содержат неизвестные функции $\bar{v}$, s и $\bar{p}$. Для исключения одной из них обратимся к уравнению (22), которое в том же приближении можно записать в виде

$$\bar{p} = f'(\rho_0)\bar{\rho} = \rho_0 f'(\rho_0)\, s. \tag{26}$$

Подставляя (26) в уравнение (25), получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + a^2 \operatorname{grad} s = 0, \tag{27}$$

где положено $a^2 = f'(\rho_0)$, так как для всех жидкостей и газов, встречающихся в природе, при постоянной энтропии, давление возрастает при возрастании плотности, т. е. $f'(\rho_0) > 0$.

Применяя к уравнению (27) операцию дивергенции и переставляя дифференцирование по t с операцией дивергенции, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v} = -a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} s = -a^2 \Delta s, \tag{28}$$

где

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}.$$

Принимая во внимание уравнение (24), получим

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \tag{29}$$

Для давления $\bar{p}$ и скорости $\mathbf{v}$ также можно получить волновое уравнение вида (29).

Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скоростей $u_0(x, y, z)$, т. е.

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = -\operatorname{grad} u_0(x, y, z). \tag{30}$$

Из уравнения (27) следует, что

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \mathbf{v}\big|_{t=0} - a^2 \operatorname{grad} \int_0^t s\, dt$$

или, в силу (30),

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\left[u_0(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\, dt \right] = -\operatorname{grad} u(x, y, z, t), \tag{31}$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $u(x, y, z, t)$ в любой момент времени t:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\, dt. \tag{32}$$

Покажем, что потенциал скоростей $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению. В самом деле, дифференцируя выражение (32) два раза по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \tag{33}$$

С другой стороны, подставляя (31) в уравнение (24), будем иметь:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u. \tag{34}$$

Сравнивая (33) и (34), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{35}$$

Отметим, что знание потенциала скоростей $u(x, y, z, t)$ достаточно для определения всего процесса движения жидкости или газа, так как

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} u, \quad s = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \bar{p} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. Пусть жидкость или газ занимают в пространстве объем V, ограниченный поверхностью Σ. В начальный момент времени $t = 0$ задано относительное изменение газа s и распределение скоростей $\bar{v}$ в каждой точке объема V. Это дает начальные условия в виде

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 s = \varphi_1(x, y, z)$$

Если граница Σ представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

§ 4. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \Delta S$ и нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t = -k \Delta S \Delta t \operatorname{grad}_n u, \tag{36}$$