Покажем, что потенциал скоростей $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению. В самом деле, дифференцируя выражение (32) два раза по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \tag{33}$$

С другой стороны, подставляя (31) в уравнение (24), будем иметь:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u. \tag{34}$$

Сравнивая (33) и (34), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{35}$$

Отметим, что знание потенциала скоростей $u(x, y, z, t)$ достаточно для определения всего процесса движения жидкости или газа, так как

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} u, \quad s = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \bar{p} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. Пусть жидкость или газ занимают в пространстве объем V, ограниченный поверхностью Σ. В начальный момент времени $t = 0$ задано относительное изменение газа s и распределение скоростей $\bar{v}$ в каждой точке объема V. Это дает начальные условия в виде

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 s = \varphi_1(x, y, z)$$

Если граница Σ представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к граничному условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0.$$

§ 4. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \Delta S$ и нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t = -k \Delta S \Delta t \operatorname{grad}_n u, \tag{36}$$

где $k > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, а n — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, т. е. что коэффициент внутренней теплопроводности k зависит только от точки (x, y, z) тела и не зависит от направления нормали поверхности S в этой точке.

Обозначим через q *тепловой поток*, т. е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (36) можно записать в виде

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{37}$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени (t_1, t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), согласно формуле (36), входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S.

Рассмотрим элемент объема ΔV. На изменение температуры этого объема на Δu за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t)]\,\gamma(x, y, z)\,\rho(x, y, z)\,\Delta V,$$

где $\rho(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ — плотность и теплоемкость вещества. Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объема V на $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$, равно

$$Q_2 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\,\gamma\rho\,dV$$

или

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV,$$

так как

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt.$$

Предположим, что внутри рассматриваемого тела имеются источники тепла. Обозначим через $F(x, y, z, t)$ плотность (количество поглощаемого или выделяемого тепла в единицу времени в единице объема тела) тепловых источников. Тогда количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток времени (t_1, t_2), будет равно

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t)\, dV.$$

Составим теперь уравнение баланса тепла для выделенного объема V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dV =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t)\, dV,$$

или, применив формулу Остроградского ко второму интегралу, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F(x, y, z, t)\right] dV = 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x, y, z) рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно быть

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x, y, z, t) \tag{38}$$

или

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t). \tag{38'}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела.*

Если тело однородно, то γ, ρ и k — постоянные и уравнение (38′) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \tag{39}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}.$$

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т. е. $F(x, y, z, t) \equiv 0$, то получим однородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{40}$$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y и t, что, например, имеет место при распространении тепла в очень тонкой однородной пластинке, уравнение (40) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{41}$$

Наконец, для тела линейного размера, например для тонкого однородного стержня, уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{42}$$

Отметим, что при такой форме уравнений (41) и (42) не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающим пространством.

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (38). Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе S тела (граничное условие).

Граничное условие может быть задано различными способами:

1) в каждой точке поверхности S задается температура

$$u|_S = \Psi_1(P, t), \tag{43}$$

где $\Psi_1(P, t)$ — известная функция точки поверхности S и времени t;

2) на поверхности S задается тепловой поток

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial n},$$

откуда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \Psi_2(P, t), \tag{44}$$

где $\Psi_2(P, t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток по формуле

$$\Psi_2(P, t) = -\frac{q(P, t)}{k};$$

3) на поверхности твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой u_0 известна. Закон теплообмена очень сложен, но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона. По закону Ньютона, количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = H(u - u_0),$$

где H — коэффициент теплообмена. Коэффициент теплообмена зависит от разности температур $u - u_0$, от характера поверхности и окружающей среды (он может изменяться вдоль поверхности тела). Мы будем считать коэффициент теплообмена H постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к следующему граничному условию:

$$H(u-u_0)=-k\frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{на } S),$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S, или, положив $h=\frac{H}{k}$,

$$\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-u_0)\Big|_S=0. \tag{45}$$

Таким образом, задача о распространении тепла в изотропном твердом теле ставится так:

Найти решение уравнения теплопроводности (38), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x, y, z) \tag{46}$$

и одному из граничных условий (43), (44) *или* (45).

§ 5. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. **Установившаяся температура в однородном твердом теле.** В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле в случае отсутствия источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{47}$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т. е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и уравнение (47) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{48}$$

Таким образом, уравнению Лапласа (48) удовлетворяет температура $u(x, y, z)$, установившаяся в однородном теле. Для определения $u(x, y, z)$ теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени.

Задача определения решения уравнения (48) по его значениям на границе рассматриваемой области называется *задачей Дирихле*.

Задача определения решения уравнения (48), удовлетворяющего граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=\varphi(P)$, называется *задачей Неймана*.