тела). Мы будем считать коэффициент теплообмена H постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к следующему граничному условию:

$$H(u-u_0) = -k\frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{на } S),$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S, или, положив $h=\frac{H}{k}$,

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u-u_0)\Big|_S = 0. \tag{45}$$

Таким образом, задача о распространении тепла в изотропном твердом теле ставится так:

Найти решение уравнения теплопроводности (38), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \tag{46}$$

и одному из граничных условий (43), (44) *или* (45).

§ 5. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. **Установившаяся температура в однородном твердом теле.** В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле в случае отсутствия источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{47}$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т. е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и уравнение (47) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{48}$$

Таким образом, уравнению Лапласа (48) удовлетворяет температура $u(x, y, z)$, установившаяся в однородном теле. Для определения $u(x, y, z)$ теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени.

Задача определения решения уравнения (48) по его значениям на границе рассматриваемой области называется *задачей Дирихле*.

Задача определения решения уравнения (48), удовлетворяющего граничному условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \varphi(P)$, называется *задачей Неймана*.

2. **Потенциальное движение несжимаемой жидкости.** Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциальное, т. е. скорость $\mathbf{v}(x, y, z)$ есть потенциальный вектор

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{49}$$

Для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, и из уравнения неразрывности (20) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{50}$$

Подставив (49) в (50), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{51}$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (51).

Глава II

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Типы уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1}$$

Коэффициенты a_{ij} — заданные функции в области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными

В этом параграфе мы дадим классификацию уравнений вида (1) в точке. Зафиксируем определенную точку $(x_1^0, \ldots, x_n)$ в области D и составим квадратичную форму

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, t_i t_j. \tag{2}$$

Уравнение (1) принадлежит *эллиптическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) положительно определенная или отрицательно определенная.

Уравнение (1) принадлежит *гиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.