2. **Потенциальное движение несжимаемой жидкости.** Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциальное, т. е. скорость $\mathbf{v}(x, y, z)$ есть потенциальный вектор

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{49}$$

Для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, и из уравнения неразрывности (20) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{50}$$

Подставив (49) в (50), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{51}$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (51).

Глава II

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Типы уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + f\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1}$$

Коэффициенты a_{ij} — заданные функции в области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными

В этом параграфе мы дадим классификацию уравнений вида (1) в точке. Зафиксируем определенную точку $(x_1^0, \ldots, x_n)$ в области D и составим квадратичную форму

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, t_i t_j. \tag{2}$$

Уравнение (1) принадлежит *эллиптическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) положительно определенная или отрицательно определенная.

Уравнение (1) принадлежит *гиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение (2) принадлежит *ультрагиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение (1) принадлежит *параболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет только один коэффициент, равный нулю, все же другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Уравнение (1) принадлежит *эллиптическому типу* соответственно *гиперболическому типу* и т. д. в области D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т. д.

Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа; уравнением гиперболического типа является волновое уравнение и, наконец, уравнением параболического типа — уравнение теплопроводности.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Введем вместо $(x_1, \ldots, x_n)$ новые независимые переменные $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k=\sum_{i=1}^{n} c_{ki}x_i \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Мы предполагаем, что преобразование (4) неособенное, т. е. что определитель $|c_{ki}|$ не равен нулю. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=\sum_{k,l=1}^{n} c_{ki}c_{lj}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}. \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k\,\partial \xi_l}+\sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial \xi_i}+cu=f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{6}$$