Уравнение (2) принадлежит *ультрагиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение (1) принадлежит *параболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (2) при приведении ее к сумме квадратов имеет только один коэффициент, равный нулю, все же другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Уравнение (1) принадлежит *эллиптическому типу* соответственно *гиперболическому типу* и т. д. в области D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т. д.

Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа; уравнением гиперболического типа является волновое уравнение и, наконец, уравнением параболического типа — уравнение теплопроводности.

§ 2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Введем вместо $(x_1, \ldots, x_n)$ новые независимые переменные $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Мы предполагаем, что преобразование (4) неособенное, т. е. что определитель $|c_{ki}|$ не равен нулю. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}. \tag{5}$$

Подставив (5) в уравнение (3), получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \tag{6}$$

где

$$\bar{a}_{kl}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{lj}. \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (7) коэффициентов при вторых производных от функции u при замене независимых переменных по формулам (4) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{k,j=1}^{n} a_{ij}t_it_j, \tag{8}$$

если в ней произвести линейное преобразование

$$t_i=\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\tau_k, \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

приводящее ее к виду

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl}\tau_k\tau_l. \tag{10}$$

В алгебре доказывается, что всегда можно подобрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы квадратичная форма (8) привелась к сумме квадратов, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\tau_k^2, \tag{10'}$$

или, иначе говоря, $\bar{a}_{kl}=0$ при $k\neq l$ и $\bar{a}_{kk}=\lambda_k$. Коэффициенты λ_k равны ± 1 или нулю соответственно. Знаки коэффициентов λ_k и определяют тип уравнения (3). Преобразованное уравнение (6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_k^2}+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}_i\frac{\partial u}{\partial\xi_i}+cu=f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{11}$$

Этот вид уравнения (3) называется его *каноническим видом.*

Положим, что все λ_k отличны от нуля, т. е. что уравнение (3) не параболического типа, и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции u можно освободиться от производных первого порядка. С этой целью вместо u введем новую искомую функцию v по формуле

$$u=ve^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\bar{b}_k}{\lambda_k}\xi_k}.$$

* Согласно закону инерции для квадратичных форм число положительных и отрицательных коэффициентов λ_k инвариантно относительно линейного преобразования, приводящего квадратичную форму (8) к виду (10'). (См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, § 25, Физматгиз, 1962).

Подставив это в уравнение (11), получим, как нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Для уравнения эллиптического типа все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k = -1$, и, умножая, если надо, обе части уравнения на (-1), мы можем считать, что все $\lambda_k = 1$. Таким образом, сохраняя прежние обозначения, мы можем утверждать, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (12)$$

В случае гиперболического типа будем считать, что имеется $(n+1)$ независимых переменных, и положим $\xi_{n+1} = t$. Тогда всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f_3(x_1, \ldots, x_n, t). \qquad (13)$$

В случае уравнения (3) с переменными коэффициентами для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области D можно указать такое неособое преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (3) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется, вообще говоря свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в как угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при весьма общих предположениях о коэффициентах уравнения, как будет показано в следующем параграфе.

§ 3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left((x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (14)$$