Подставив это в уравнение (11), получим, как нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Для уравнения эллиптического типа все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k = -1$, и, умножая, если надо, обе части уравнения на (-1), мы можем считать, что все $\lambda_k = 1$. Таким образом, сохраняя прежние обозначения, мы можем утверждать, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, \ldots, x_n). \tag{12}$$

В случае гиперболического типа будем считать, что имеется $(n+1)$ независимых переменных, и положим $\xi_{n+1} = t$. Тогда всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f_3(x_1, \ldots, x_n, t). \tag{13}$$

В случае уравнения (3) с переменными коэффициентами для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области D можно указать такое неособое преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (3) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется, вообще говоря свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в как угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при весьма общих предположениях о коэффициентах уравнения, как будет показано в следующем параграфе.

§ 3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left((x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{14}$$

где коэффициенты A, B и C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль.

Уравнению (14) соответствует квадратичная форма

$$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2. \tag{15}$$

Дифференциальное уравнение (1) принадлежит:

1) *гиперболическому типу*, если $B^2 - AC > 0$ (квадратичная форма (15) знакопеременная);

2) *параболическому типу*, если $B^2 - AC = 0$ (квадратичная форма (15) знакопостоянная);

3) *эллиптическому типу*, если $B^2 - AC < 0$ (квадратичная форма (15) знакоопределенная).

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η). Пусть

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{16}$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

в области D.

В новых независимых переменных ξ и η уравнение (14) запишется так:

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta} + \bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \tag{18}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}(\xi, \eta) &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{C}(\xi, \eta) &= A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{B}(\xi, \eta) &= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = (B^2 - AC)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2. \tag{20}$$

Отсюда легко видеть, что преобразование независимых переменных не меняет типа уравнения.

В преобразовании (16) в нашем распоряжении две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Покажем, что их можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий

$$1)\ \bar{A}=0,\ \bar{C}=0;\ 2)\ \bar{A}=0,\ \bar{B}=0;\ 3)\ \bar{A}=\bar{C},\ \bar{B}=0.$$

Тогда, очевидно, преобразованное уравнение (18) примет наиболее простой вид.

1) $B^2-AC>0$. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит *гиперболическому типу*. Можно считать, что в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (14) к каноническому виду, либо $A\neq 0$, либо $C\neq 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{21}$$

Пусть $A\neq 0$. Так как $B^2-AC>0$, то уравнение (21) можно записать в виде

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B-\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(B+\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{21а}$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(B-\sqrt{B^2-AC})\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{21б}$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (21а) и (21б) будут решениями уравнения (21).

Для интегрирования уравнений (21а) в (21б) составим соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}},\quad \frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

или

$$Ady-(B+\sqrt{B^2-AC})\,dx=0,\quad Ady-(B-\sqrt{B^2-AC})\,dx=0. \tag{22}$$

Заметим, что уравнения (22) можно записать в виде одного уравнения

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0. \tag{22а}$$

Коэффициенты дифференциальных уравнений (22) имеют непрерывные частные производные до второго порядка, что следует из предположений о коэффициентах A, B и C. Так как $A(x_0, y_0)\neq 0$, то существуют интегралы

$$\varphi_1(x, y)=\mathrm{const},\quad \varphi_2(x, y)=\mathrm{const} \tag{23}$$

уравнений (22) и их левые части имеют непрерывные частные производные до второго порядка в окрестности точки (x_0, y_0)*. Левые части интегралов (23) будут соответственно решениями уравнений (21а) и (21б).

Кривые (23) называются *характеристическими кривыми* или просто *характеристиками* уравнения (14), а уравнение (21) — *уравнением характеристик.*

Для уравнения гиперболического типа $B^2 - AC > 0$ и, следовательно, интегралы (23) вещественны и различны. При этом мы имеем два *различных* семейства *вещественных* характеристик.

Положим в преобразовании (16)

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \varphi_2(x, y),$$

где $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — соответственно суть дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений (21а) и (21б). Эти решения можно выбрать так, чтобы якобиан $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) области D. Действительно, так как $A \neq 0$, то из уравнений (21а) и (21б) получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.$$

Отсюда, в силу $B^2 - AC > 0$ и уравнений (21а) и (21б), следует, что если якобиан в некоторой точке равен нулю, то в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка от φ_1 или φ_2. Таким образом, надо строить такие решения уравнений (21а) и (21б), у которых обе частные производные первого порядка одновременно не равны нулю**.

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению (21) и, в силу (19), в уравнении (18) $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Коэффициент $\bar{B} \neq 0$ всюду в рассматриваемой области, что следует из (17) и (20). Разделив на коэффициент $2\bar{B}$ уравнение (18), приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{24}$$

Этот вид уравнения также называется *каноническим.*

Если уравнение (14) было линейным относительно производных первого порядка и самой функции u, то преобразованное уравне-

---

* В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, гл. 8, § 3—5, Физматгиз, 1959.

** Для этого достаточно для уравнений (21а) и (21б) решить задачу Коши, задавая при $x = x_0$ соответственно значения $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ так, чтобы $\varphi'_{1y}(x_0, y_0) \neq 0$ и $\varphi'_{2y}(x_0, y_0) \neq 0$.

ние также будет линейным:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+c(\xi,\eta)\,u=f(\xi,\eta). \qquad (25)$$

При $A=C=0$ уравнение (14) уже имеет вид (24). Положив

$$\xi=\alpha+\beta,\quad \eta=\alpha-\beta,$$

приведем уравнение (24) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\Phi\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right). \qquad (26)$$

Это — *канонический вид уравнения гиперболического типа.*

2) $B^2-AC=0$. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит *параболическому типу.* Так как мы предполагаем, что коэффициенты A, B и C уравнения (14) не обращаются одновременно в нуль, то, в силу условия $B^2-AC=0$, следует, что в каждой точке этой области один из коэффициентов A и C отличен от нуля. Пусть, например, $A\neq 0$ в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (14) к каноническому виду. Тогда оба уравнения (21а) и (21б) совпадают и обращаются в уравнение

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (27)$$

Нетрудно видеть, что всякое решение уравнения (27), в силу условия $B^2-AC=0$, удовлетворяет также уравнению

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (28)$$

Мы можем, как и в предыдущем пункте, найти такое решение $\varphi(x, y)$ уравнения (27), что функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка и ее первые производные не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Отметим, что для уравнения параболического типа мы имеем *одно семейство вещественных характеристик* $\varphi(x, y)=\text{const}$.

Положим в преобразовании (16)

$$\xi=\varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (27), а за $\eta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию так, чтобы якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда в уравнении (18) $\bar{A}\equiv 0$, что следует из (19), а коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ принимает следующий вид:

$$\bar{B}=\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Согласно (27) и (28), $\overline{B}\equiv 0$ в окрестности точки (x_0, y_0). Коэффициент C в уравнении (18) преобразуется к виду

$$\overline{C}=\frac{1}{A}\left(A\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

откуда $\overline{C}\neq 0$, так как в противном случае, в силу (27), якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=0$. Разделив на $\overline{C}\neq 0$ уравнение (18), приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{29}$$

Это — *канонический вид уравнения параболического типа.*

3) $B^2-AC<0$. В рассматриваемой области D уравнение (14) принадлежит *эллиптическому типу.* Будем считать, что коэффициенты A, B и C суть аналитические функции от x и y *. Тогда коэффициенты уравнений (21а) и (21б) — также аналитические функции от x и y, и можно утверждать, что уравнение (21) имеет аналитическое решение

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)$$

в окрестности точки (x_0, y_0) и $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\neq 0$ в этой окрестности **. Положим в преобразовании (16)

$$\xi=\varphi_1(x,y),\quad \eta=\varphi_2(x,y).$$

Нетрудно показать, что $\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)}\neq 0$.

Разделяя теперь в тождестве

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

вещественную и мнимую части, получим

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Отсюда, в силу (19), следует, что $\overline{A}=\overline{C}$, $\overline{B}=0$.

---

* Функция $F(x, y)$ переменных x, y называется аналитической в точке (x_0, y_0), если она разлагается в степенной ряд

$$F(x,y)=\sum_{p,\,q=0}^{\infty}a_{pq}(x-x_0)^p(y-y_0)^q,$$

сходящийся при достаточно малых $(x-x_0)$, $(y-y_0)$.

** Существование такого аналитического решения следует из теоремы Ковалевской.

В силу определенности квадратичной формы

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2 \quad (B^2-AC<0),$$

коэффициенты $\bar{A}=\bar{C}$ могут обратиться в нуль только в том случае, если

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y}=0. \tag{30}$$

Но решение $\varphi(x, y)$ выбрано так, что равенства (30) не выполняются одновременно. Таким образом, в уравнении (18) $\bar{A}=\bar{C}\neq 0$ и после деления на $\bar{A}$ оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{31}$$

Это — *канонический вид уравнений эллиптического типа.*

Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (14) принадлежит различным типам. Как уже было сказано, точки параболичности уравнения (14) характеризуются равенством

$$B^2-AC=0. \tag{32}$$

Предположим, что множество точек области D, которое описывается уравнением (32), является простой гладкой кривой σ. Кривая σ называется линией *параболического вырождения.* Если кривая σ делит область D на две части, в одной из которых уравнение (14) принадлежит эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому типу, то мы скажем, что в области D уравнение (14) *смешанного типа.* Например:

1) Уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

— уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси Ox. При $y>0$ оно принадлежит эллиптическому типу, при $y<0$ — гиперболическому типу, $y=0$ — линия параболичности.

2) Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

— уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси Ox; $y=0$ — линия параболичности, которая одновременно является характеристикой ($y=0$ — огибающая семейства характеристик).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{33}$$

Это уравнение гиперболического типа, так как

$$B^2 - AC = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Согласно общей теории, составляем уравнение (22а)

$$dy^2 + 2 \sin x \, dx dy - \cos^2 x \, dx^2 = 0$$

или

$$dy + (1 + \sin x) \, dx = 0, \quad dy - (1 - \sin x) \, dx = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x + y - \cos x = C_1, \quad x - y + \cos x = C_2.$$

Вводим новые переменные (ξ, η) по формулам

$$\xi = x + y - \cos x, \quad \eta = x - y + \cos x.$$

Тогда уравнение (33) в новых независимых переменных приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0. \tag{34}$$

Положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, приведем уравнение (34) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$$

Уравнение (33) можно проинтегрировать в замкнутом виде, т. е. найти формулу, дающую все решения этого уравнения. Действительно, перепишем уравнение (34) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \Theta(\eta),$$

где $\Theta(\eta)$ — произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η, считая ξ параметром, найдем, что

$$u = \int \Theta(\eta) \, d\eta + \varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная функция по ξ. Полагая

$$\int \Theta(\eta) \, d\eta = \psi(\eta),$$

получим

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

или, возвращаясь к старым переменным (x, y), получим решение уравнения (33) в виде

$$u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x).$$

ЗАДАЧИ.

Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - (3+\sin^2 x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\,\frac{\partial u}{dy} = 0.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3. $(1+x^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Ответы:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\eta-\xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$
 $\xi = 2x + \sin x + y,\ \ \eta = 2x - \sin x - y.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \frac{\partial u}{\partial\xi} = 0,\ \ \xi = \frac{x^2}{2} + y,\ \ \eta = x.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0,\quad \xi = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),\quad \eta = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$

Глава III

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Квазилинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$ap + bq = c,\ \ (p = u_x,\ \ q = u_y) \tag{1}$$

где a, b, c — заданные функции от x, y, u, которые в рассматриваемой области имеют непрерывные частные производные первого порядка и удовлетворяют условию $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u). Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью*.

Функции $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ и $c(x, y, u)$ определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u), а именно: в каждой фиксированной точке этого пространства мы имеем направление, направляющие косинусы которого пропорциональны a, b и c. Интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x,\ y,\ u)} = \frac{dy}{b(x,\ y,\ u)} = \frac{du}{c(x,\ y,\ u)} \tag{2}$$

и называются *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (1). Если ввести параметр s, изменяющийся вдоль