ЗАДАЧИ.

Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{dy} = 0.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3. $(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Ответы:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta - \xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$
   $\xi = 2x + \sin x + y, \ \eta = 2x - \sin x - y.$

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \ \xi = \frac{x^2}{2} + y, \ \eta = x.$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \xi = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \ \eta = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$

Глава III

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Квазилинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$ap + bq = c, \ (p = u_x, \ q = u_y) \tag{1}$$

где a, b, c — заданные функции от x, y, u, которые в рассматриваемой области имеют непрерывные частные производные первого порядка и удовлетворяют условию $a^2 + b^2 \neq 0$.

Решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u). Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью*.

Функции $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ и $c(x, y, u)$ определяют некоторое поле направлений в пространстве (x, y, u), а именно: в каждой фиксированной точке этого пространства мы имеем направление, направляющие косинусы которого пропорциональны a, b и c. Интегральные кривые, соответствующие этому полю направлений, определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \tag{2}$$

и называются *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (1). Если ввести параметр s, изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2) примут вид

$$\frac{dx}{ds}=a(x, y, u), \frac{dy}{ds}=b(x, y, u), \frac{du}{ds}=c(x, y, u). \qquad (3)$$

Величины p, q и (-1) пропорциональны направляющим косинусам нормали к интегральной поверхности $u=u(x, y)$ и уравнение (1) выражает условие перпендикулярности

$$ap+bq+c(-1)=0$$

нормали к интегральной поверхности с направлением поля, т. е. уравнение (1) сводится к требованию, чтобы в каждой точке интегральной поверхности $u=u(x, y)$ направление, определяемое указанным выше полем направлений, находилось в касательной плоскости к поверхности. Если некоторая поверхность $u=u(x, y)$ образована характеристиками уравнения (1), то в каждой точке этой поверхности касательная к характеристике, проходящей через эту точку, лежит в касательной плоскости к поверхности и, следовательно, эта поверхность является интегральной поверхностью уравнения (1). Обратно, *если* $u=u(x, y)$ *есть интегральная поверхность уравнения* (1), *то ее можно покрыть семейством характеристик*. Действительно, на любой интегральной поверхности $u=u(x, y)$ уравнения (1) можно задать однопараметрическое семейство кривых $x=x(s)$, $y=y(s)$, $u=u(x(s), y(s))$ с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds}=a(x, y, u), \frac{dy}{ds}=b(x, y, u),$$

в которых u заменено его выражением $u=u(x, y)$. Вдоль каждой такой кривой уравнение (1) переходит в $\frac{du}{ds}=c$. Таким образом, рассматриваемое семейство удовлетворяет уравнениям (3) и, следовательно, состоит из характеристических кривых.

Так как решения системы дифференциальных уравнений (3) однозначно определяются начальными значениями x, y, u при $s=0$, мы получаем следующий результат: *любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой интегральной поверхности.*

Задача Коши. Пусть пространственная кривая l задана в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $u=u(t)$, причем $x_t^2+y_t^2\neq 0$. Обозначим через l_0 проекцию кривой l на плоскость xOy.

Задача Коши для уравнения (1) ставится так: *в окрестности проекции* l_0 *найти интегральную поверхность уравнения* (1), *проходящую через заданную кривую* l, т. е. найти такое решение уравнения (1), которое принимает заданные значения в точках кривой l_0. Будем предполагать, что начальные функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области.

Для решения задачи Коши проведем через каждую точку кривой l характеристику, т. е. интегральную кривую системы (3); это можно сделать, причем единственным образом, в некоторой окрестности кривой l. Мы получим семейство характеристических кривых, зависящих еще от параметра t.

$$x = x(s, t), \; y = y(s, t), \; u = u(s, t). \tag{4}$$

В силу наших предположений функции (4) имеют непрерывные производные первого порядка по s и t. Кривые (4) образуют поверхность $u = u(x, y)$, если из первых двух уравнений (4) можно выразить s и t через x и y. Для этого достаточно, чтобы на кривой l не обращался в нуль якобиан

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = a y_t - b x_t. \tag{5}$$

Если на l выполняется условие $\Delta \neq 0$, то u является функцией x и y. Нетрудно видеть, что эта функция есть решение уравнения (1). Действительно, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции и уравнениями (3), получим

$$\frac{du}{ds} = u_x a + u_y b.$$

Но $\frac{du}{ds} = c$ и, следовательно, $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Единственность решения задачи Коши следует из того, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Это значит, что любая интегральная поверхность, проходящая через кривую l, целиком содержит семейство характеристик, проходящих через l и, следовательно, совпадает с $u = u(x, y)$.

Если $\Delta = 0$ всюду на кривой l и если существует интегральная поверхность $u = u(x, y)$ с непрерывными производными первого порядка, проходящая через l, то эта кривая должна быть характеристикой. В самом деле, в этом случае параметр t на кривой l можно выбрать так, что вдоль этой кривой $a = \frac{dx}{dt}$, $b = \frac{dy}{dt}$. Далее, подставляя в $u(x, y)$ выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ и дифференцируя по t, будем иметь $\frac{du}{dt} = u_x a + b u_y$. Отсюда, учитывая, что $u(x, y)$ есть решение уравнения (1), получим $\frac{du}{dt} = c$; следовательно, l является характеристикой. Но, если l — характеристика, то через нее проходит не только одна, а бесконечно много интегральных поверхностей. Действительно, проведем через любую точку кривой l кривую l', которая уже не является характеристикой. Интегральная поверхность, проходящая через l', обязательно содержит характеристику l. Таким образом, множество решений задачи Коши для характеристики l определяется множеством кривых l'. Все интегральные поверхности, проходящие через кривые этого множества, содержат характеристику l. Следовательно, *характеристики являются* линиями пересечения интегральных поверхностей *линиями ветвления*, тогда как через нехарактеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. *Если $\Delta \neq 0$ всюду на начальной кривой l, то задача Коши для уравнения* (1) *имеет одно и только одно решение. Если же $\Delta = 0$ всюду на l, то для того чтобы задача Коши имела решение, кривая l должна быть характеристикой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений.*

Заметим, что без предположения о непрерывной дифференцируемости решения $u(x, y)$ на кривой l мы не можем из равенства $\Delta = 0$ на l сделать вывод, что l — характеристика. Действительно, может случиться, как это мы увидим на примере, что l — не характеристика, вдоль нее $\Delta = 0$, и все же через l проходит интегральная поверхность, но такая, что частные производные от $u(x, y)$ перестают быть непрерывными в точках l, так как кривая l является *особой линией* интегральной поверхности.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(y^2 - u)\, p + yq = u. \tag{6}$$

Система (3) имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = y^2 - u, \quad \frac{dy}{ds} = y, \quad \frac{du}{ds} = u \tag{7}$$

и ее решение, выраженное через начальные значения переменных (x, y, u), будет

$$x = \left(\frac{1}{2}\, y_0^2 e^s - u_0\right) e^s + x_0 + \left(u_0 - \frac{1}{2}\, y_0^2\right), \quad y = y_0 e^s, \quad u = u_0 e^s. \tag{8}$$

Положим, что кривая l, через которую должна проходить интегральная поверхность, задана уравнениями

$$x_0 = 1, \quad y_0 = t, \quad u_0 = \frac{1}{2}\, t^2. \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), получим

$$x = \frac{t^2}{2}\,(e^s - 1)\, e^s + 1, \quad y = te^s, \quad u = \frac{t^2}{2}\, e^s. \tag{10}$$

Определитель

$$\Delta = x_s y_t - x_t y_s = \frac{t^2}{2}\, e^{2s},$$

не обращается в нуль при $s = 0$ и $t \neq 0$. Исключая s и t, мы получим уравнение интегральной поверхности

$$u = 1 - x + \frac{y^2}{2}.$$

Пусть теперь кривая l задана уравнениями:

$$x_0 = 0, \ y_0 = t, \ u_0 = t^2. \tag{11}$$

Подставив (11) в (8), найдем, что

$$x = t^2 e^s (\operatorname{ch} s - 1), \ y = te^s, \ u = t^2 e^s.$$

Определитель $\Delta = te^s (e^s - 1)$ обращается в нуль при $s = 0$, т. е. вдоль l, хотя l не характеристика. Исключая s и t, мы получим

$$u(x, y) = y(y \pm \sqrt{2x}),$$

т. е. две интегральные поверхности уравнения (6), проходящие через кривую (11). В данном случае $p = \pm \frac{y}{\sqrt{x}}$ и эта частная производная обращается в бесконечность вдоль линии (11).

§ 2. Нелинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{12}$$

где F — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем пяти аргументам в рассматриваемой области и кроме того, $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$.

Выясним прежде всего геометрический смысл уравнения (12). В любой фиксированной точке (x, y, u) уравнение (12) устанавливает зависимость между величинами p и q, определяющими направление касательной плоскости к интегральной поверхности. Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку x, y, u, соотношение (12) выделяет семейство плоскостей, зависящее от одного параметра. Огибающая этого семейства возможных касательных плоскостей есть некоторый конус; назовем его *конусом* T или *конусом Монжа*. Уравнение (12) эквивалентно, таким образом, заданию в каждой точке (x, y, u) рассматриваемой области пространства конуса T, а искомая интегральная поверхность уравнения (12) должна обладать тем свойством, что в каждой ее точке касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке.

Найдем уравнения образующих конуса T в заданной точке (x, y, u). Пусть p и q — функции некоторого параметра α, удовлетворяющие уравнению (12) в фиксированной точке (x, y, u). Конус T является огибающей семейства плоскостей

$$p(\alpha)(X - x) + q(\alpha)(Y - y) - (U - u) = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по α, получим

$$p'(\alpha)(X - x) + q'(\alpha)(Y - y) = 0. \tag{14}$$