Пусть теперь кривая l задана уравнениями:

$$x_0=0,\ y_0=t,\ u_0=t^2. \tag{11}$$

Подставив (11) в (8), найдем, что

$$x=t^2e^s(\operatorname{ch} s-1),\ y=te^s,\ u=t^2e^s.$$

Определитель $\Delta=te^s(e^s-1)$ обращается в нуль при $s=0$, т. е. вдоль l, хотя l не характеристика. Исключая s и t, мы получим

$$u(x,\ y)=y(y\pm\sqrt{2x}),$$

т. е. две интегральные поверхности уравнения (6), проходящие через кривую (11). В данном случае $p=\pm\frac{y}{\sqrt{x}}$ и эта частная производная обращается в бесконечность вдоль линии (11).

§ 2. Нелинейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x,\ y,\ u,\ p,\ q)=0, \tag{12}$$

где F — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем пяти аргументам в рассматриваемой области и кроме того, $F_p^2+F_q^2\neq 0$.

Выясним прежде всего геометрический смысл уравнения (12). В любой фиксированной точке $(x,\ y,\ u)$ уравнение (12) устанавливает зависимость между величинами p и q, определяющими направление касательной плоскости к интегральной поверхности. Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку $x,\ y,\ u$, соотношение (12) выделяет семейство плоскостей, зависящее от одного параметра. Огибающая этого семейства возможных касательных плоскостей есть некоторый конус; назовем его *конусом* T или *конусом Монжа*. Уравнение (12) эквивалентно, таким образом, заданию в каждой точке $(x,\ y,\ u)$ рассматриваемой области пространства конуса T, а искомая интегральная поверхность уравнения (12) должна обладать тем свойством, что в каждой ее точке касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке.

Найдем уравнения образующих конуса T в заданной точке $(x,\ y,\ u)$. Пусть p и q — функции некоторого параметра α, удовлетворяющие уравнению (12) в фиксированной точке $(x,\ y,\ u)$. Конус T является огибающей семейства плоскостей

$$p(\alpha)(X-x)+q(\alpha)(Y-y)-(U-u)=0. \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по α, получим

$$p'(\alpha)(X-x)+q'(\alpha)(Y-y)=0. \tag{14}$$

Дифференцируя соотношение $F=0$ по α, будем иметь

$$Pp'(\alpha)+Qq'(\alpha)=0, \tag{15}$$

где положено

$$P=F_p,\ Q=F_q.$$

Считая, что производные $p'(\alpha)$ и $q'(\alpha)$ не равны нулю, одновременно мы из однородных уравнений (14) и (15) получим

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}$$

и, наконец, используя уравнение (13), получим уравнения образующих конуса T:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{U-u}{Pp+qQ}. \tag{16}$$

В случае квазилинейного уравнения (1) в каждой точке имеется только одно направление (конус T вырождается в прямую линию) и касательная плоскость к искомой интегральной поверхности содержит это направление. В случае нелинейного уравнения (12) мы имеем в каждой точке вместо одного определенного направления конус T и касательная плоскость к искомым интегральным поверхностям должна касаться этого конуса. Таким образом для нелинейного уравнения (12) нельзя непосредственно строить характеристические кривые, как это мы делали для квазилинейного уравнения (1), так как вместо поля направлений мы имеем поле конусов. Но мы покажем, что если известна интегральная поверхность $u=u(x, y)$ уравнения (12), то ее можно покрыть линиями, которые вполне аналогичные характеристическим линиям квазилинейного уравнения (1). Действительно, в каждой точке интегральной поверхности касательная плоскость должна касаться конуса T, соответствующего этой точке, и тем самым должна содержать одну из образующих этого конуса, вдоль которой она и касается конуса. Эти образующие конусов T и создают на интегральной поверхности поле направлений и тем самым, интегрируя соответствующее этому полю направлений дифференциальное уравнение первого порядка, мы покрываем нашу интегральную поверхность семейством кривых C, зависящим от одного параметра. Направляющие косинусы упомянутого поля направлений пропорциональны знаменателям уравнений (16), где p и q определяются из уравнения рассматриваемой интегральной поверхности. Таким образом, вдоль линий C, покрывающих заданную интегральную поверхность, выполняются соотношения

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{pP+qQ} \tag{17}$$

или

$$\frac{dx}{ds}=P,\ \frac{dy}{ds}=Q,\ \frac{du}{ds}=pP+qQ. \tag{18}$$

Чтобы найти линии C на заданной интегральной поверхности, достаточно проинтегрировать уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}, \tag{19}$$

где знаменатели написанных дробей содержат только переменные x и y, поскольку функция u и ее частные производные p и q на заданной поверхности являются известными функциями x и y. Интегрируя уравнение (19) и пользуясь уравнением поверхности $u=u(x, y)$, мы получим однопараметрическое семейство кривых C. Правые части уравнений (18) имеют определенный смысл только при определенном выборе интегральной поверхности $u=u(x, y)$. Для заданной интегральной поверхности величины p и q есть известные функции x и y. Мы дополним систему уравнений (18) еще двумя уравнениями, содержащими дифференциалы dp и dq, так, чтобы получилась система дифференциальных уравнений, не зависящая от выбора интегральной поверхности уравнения (12).

Введем обозначения

$$X=F_x,\ Y=F_y,\ U=F_u,\ r=u_{xx},\ \sigma=u_{xy},\ t=u_{yy}.$$

Дифференцируя левую часть уравнения (12) сначала по x, а затем по y, получим соотношения

$$X+Up+Pr+Q\sigma=0,\ Y+Uq+P\sigma+Qt=0, \tag{20}$$

которые являются тождествами на заданной интегральной поверхности.

Вдоль кривой C мы имеем, очевидно:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{ds}&=r\frac{dx}{ds}+\sigma\frac{dy}{ds}=Pr+Q\sigma,\\ \frac{dq}{ds}&=\sigma\frac{dx}{ds}+t\frac{dy}{ds}=P\sigma+Qt.\end{aligned} \tag{21}$$

Определяя из равенств (20) значения $Pr+Q\sigma$, $P\sigma+Qt$ и подставляя их в уравнения (21), получим два добавочных дифференциальных уравнения

$$\frac{dp}{ds}=-(X+Up),\ \frac{dq}{ds}=-(Y+Uq).$$

Присоединив эти уравнения к уравнениям (18), получим систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений с пятью функциями вспомогательного параметра s:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds}=P,\ \frac{dy}{ds}=Q,\ \frac{du}{ds}=Pp+Qq,\\ \frac{dp}{ds}=-(X+Up),\ \frac{dq}{ds}=-(Y+Uq).\end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом на любой интегральной поверхности вдоль всякой кривой C, построенной выше, выполняются уравнения (22).

Систему дифференциальных уравнений (22) можно рассматривать независимо от интегральных поверхностей уравнения (12). Эта система называется *характеристической системой* уравнения (12). Нетрудно проверить, что система (22) имеет первый интеграл

$$F(x, y, u, p, q) = C. \tag{23}$$

Действительно, дифференцируя по s левую часть этого равенства и пользуясь уравнениями (22), получим

$$\frac{dF}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} =$$
$$= XP + YQ + U(Pp + Qq) - P(X + Up) - Q(Y + Uq) \equiv 0,$$

т. е. функция F вдоль каждого решения системы (22) принимает постоянное значение.

Из множества решений системы (22) выделим те решения системы, вдоль которых функция F принимает значение, равное нулю, как того требует исходное дифференциальное уравнение. Назовем такие решения системы (22) характеристическими полосами уравнения (12), т. е. *характеристической полосой уравнения* (12) называется система функций

$$x(s),\ y(s),\ u(s),\ p(s),\ q(s), \tag{24}$$

удовлетворяющих системе (22) и уравнению

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \tag{25}$$

Пространственная кривая $x(s)$, $y(s)$ и $u(s)$, несущая эту полосу, называется *характеристической кривой*. Функции (24) определяют не только пространственную кривую, но и плоскость, касающуюся ее в каждой точке.

Для того чтобы решение системы (22) удовлетворяло соотношению (25), т. е. было характеристической полосой, достаточно, в силу (23), проверить, что этому соотношению удовлетворяют начальные данные $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ решения, т. е.

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \tag{26}$$

Отметим, что при выводе уравнений (22) мы пользовались производными второго порядка функции $u(x, y)$. Кроме того, при интегрировании системы (22) существенно, чтобы правые части имели непрерывные производные первого порядка. Для этого нужно потребовать, чтобы функция $F(x, y, u, p, q)$ имела непрерывные производные до второго порядка в некоторой области.

Как и для квазилинейных уравнений, из самого вывода характеристической системы уравнений (22) можно получить следующие теоремы.

I. *На любой интегральной поверхности уравнения* (12) *существует однопараметрическое семейство характеристических кривых и соответствующих характеристических полос.*

II. *Если характеристическая полоса имеет общий элемент* (т. е. значения x, y, u, p, q) *с интегральной поверхностью, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.*

III. *Если две интегральные поверхности касаются в некоторой точке, то они касаются вдоль всей характеристической полосы, имеющей начальным элементом точку касания плоскостей.*

Предположим теперь, что мы сумели проинтегрировать систему (22) при условии (25) и тем самым нашли всевозможные характеристические полосы. Покажем, каким образом можно из этих характеристических полос строить интегральные поверхности уравнения (12).

Пусть начальная полоса задана функциями

$$x_0(t),\ y_0(t),\ u_0(t),\ p_0(t),\ q_0(t), \tag{27}$$

причем эти функции должны удовлетворять условию (26) и иметь непрерывные производные. Через каждый элемент заданной начальной полосы проведем характеристическую полосу. Эта полоса получается как решение системы (22), которое при $s=0$ обращается в заданные элементы полосы $x_0(t)$, $y_0(t)$, $u_0(t)$, $p_0(t)$, $q_0(t)$. Обозначим эту систему решений через

$$x=x(s,\ t),\ y=y(s,\ t),\ u=u(s,\ t),\ p=p(s,\ t),\ q=q(s,\ t). \tag{28}$$

Единственность таких решений и их непрерывная дифференцируемость по s и t гарантируется известными теоремами теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Первые три из уравнений (28) определяют в параметрической форме некоторую поверхность.

Если определитель

$$\Delta = x_s y_t - y_s x_t = F_p y_t - F_q x_t \tag{29}$$

отличен от нуля на начальной полосе, т. е. при $s=0$, а следовательно, в силу непрерывности производных и в некоторой ее окрестности, то в качестве независимых переменных можно взять x и y в этой окрестности вместо параметров s и t. Это значит, что можно выразить величины u, p, q как функции от x и y и, в частности, получить явное уравнение поверхности $u=u(x,\ y)$. Функция $u(x,\ y)$ будет удовлетворять уравнению (12), так как выражение $F(x,\ y,\ u,\ p,\ q)$ обращается в нуль тождественно по s и t на нашей поверхности (в силу выполнения условия (26) при $s=0$); следовательно, оно также обращается в нуль тождественно по x и y. Остается еще доказать, что функции p и q, определенные последними двумя уравнениями (28), совпадают соответственно

---

* В. В. Степанов, гл. 8, § 3—5.

с u_x и u_y. Для этого достаточно показать, что два выражения

$$H=\frac{\partial u}{\partial s}-p\frac{\partial x}{\partial s}-q\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$L=\frac{\partial u}{\partial t}-p\frac{\partial x}{\partial t}-q\frac{\partial y}{\partial t} \tag{30}$$

тождественно обращаются в нуль на поверхности $u=u(x, y)$, тогда из соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=0$$

следует, что $p=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q=\frac{\partial u}{\partial y}$, поскольку $\Delta=x_s y_t-x_t y_s\neq 0$ по предположению.

Обращение в нуль величины H непосредственно следует из первых трех уравнений системы (22). Остается выяснить, при каких условиях и второе из соотношений (30) обращается в нуль тождественно. Рассмотрим тождество

$$\frac{\partial L}{\partial s}-\frac{\partial H}{\partial t}=p_t x_s+q_t y_s-p_s x_t-q_s y_t$$

и воспользуемся уравнениями (22), а также тем, что из $H\equiv 0$ следует равенство $\frac{\partial H}{\partial t}=0$. Тогда получим

$$\frac{\partial L}{\partial s}=P\frac{\partial p}{\partial t}+Q\frac{\partial q}{\partial t}+(X+Up)\frac{\partial x}{\partial t}+(Y+Uq)\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Далее, дифференцируя по t соотношение $F=0$, которому удовлетворяют функции (28), получим

$$X\frac{\partial x}{\partial t}+Y\frac{\partial y}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial t}+P\frac{\partial p}{\partial t}+Q\frac{\partial q}{\partial t}=0.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, будем иметь

$$\frac{\partial L}{\partial s}=U\left(p\frac{\partial x}{\partial t}+q\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial s}=-UL,$$

откуда следует

$$L=L_0 e^{-\int\limits_0^s U\,ds},$$

где L_0 есть значение L при $s=0$. Из последнего равенства видно, что для обращения L в нуль при всех значениях s необходимо и достаточно, чтобы $L_0=0$, т. е. чтобы функции (27) удовлетворяли соотношению

$$\frac{du_0}{dt}=p_0\frac{dx_0}{dt}+q_0\frac{dy_0}{dt}.$$

Таким образом, из предыдущих рассуждений следует, что если функции (27) удовлетворяют двум соотношениям

$$F(x_0,\ y_0,\ u_0,\ p_0,\ q_0)=0, \qquad (31)$$
$$\frac{du_0}{dt}=p_0\frac{dx_0}{dt}+q_0\frac{dy_0}{dt}$$

и если определитель $\Delta=x_s y_t-x_t y_s\neq 0$ при $s=0$, то первые три из уравнений (28) в некоторой $(s,\ t)$ окрестности определяют интегральную поверхность $u=u(x,\ y)$ уравнения (12), содержащую начальную полосу, причем $u(x,\ y)$ имеет непрерывные производные второго порядка.

Задача Коши. Задача Коши для уравнения (12) формулируется так же, как и в случае квазилинейного уравнения. *Требуется найти интегральную поверхность уравнения* (12), *проходящую через заданную кривую* l.

Пусть кривая l задана в параметрической форме:

$$x=x_0(t),\ y=y_0(t),\ u=u_0(t), \qquad (32)$$

причем $x_t^2+y_t^2\neq 0$. Кривую l дополним до полосы C_1, определив $p_0(t)$ и $q_0(t)$ из уравнений (31). Функциональный определитель левых частей уравнений (31) по p_0 и q_0

$$\Delta_0=y_0'(t)F_{p_0}-x_0'(t)F_{q_0}$$

совпадает с определителем (29) при $s=0$. Будем считать, что определитель (29) отличен от нуля вдоль l, и что система (31) на l однозначно разрешима относительно $p_0(t)$ и $q_0(t)$. Тогда на основании предыдущих рассуждений следует, что в окрестности кривой l существует одна и только одна интегральная поверхность уравнения (12), проходящая через кривую l.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\Delta_0=x_s y_t-x_t y_s\big|_{s=0}=y_0'(t)F_{p_0}-x_0'(t)F_{q_0}=0 \qquad (33)$$

всюду вдоль заданной полосы C_1, удовлетворяющей двум соотношениям (31). Положим, что существует дважды непрерывно дифференцируемая интегральная поверхность $u=u(x,\ y)$, проходящая через полосу C_1. Из (33) и второго соотношения (31) следует, что полоса удовлетворяет уравнениям (18) (параметр s обозначен буквой t), а также согласно предыдущим вычислениям эта полоса удовлетворяет и всем уравнениям (22), т. е. является характеристической полосой. Таким образом, в случае $\Delta_0=0$ интегральная поверхность уравнения (1) может проходить через кривую l, если функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определенные из соотношений (31), дополняют эту кривую до характеристической полосы. Но если это условие выполнено, то существует бесчисленное множество интегральных поверхностей, содержащих эту полосу. Действительно, проведем некоторую полосу C_1', которая имеет общий элемент с характеристической полосой C_1 и такая, что вдоль нее определитель (29) отличен от нуля. Через эту полосу проходит определенная интегральная поверхность, которая будет содержать всю полосу C_1, так как она содержит ее начальный элемент. Ввиду произвольности в выборе полосы C_1', мы имеем бесчисленное множество интегральных поверхностей, содержащих полосу C_1.

Если вдоль заданной полосы определитель (29) равен нулю, но полоса не является характеристической, то не существует интегральной поверхности, содержащей эту начальную полосу и обладающей в ее окрестности непрерывными производными до второго порядка. Однако возможно, что существует интегральная поверхность, для которой кривая l является особой кривой.

§ 3. Нелинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными

Изложенная в § 2 теория нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными непосредственно распространяется на уравнение с n неизвестными переменными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \left(p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{34}$$

Поэтому мы ограничимся лишь указанием результатов. Характеристическая система, соответствующая уравнению (34), имеет вид:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = -\frac{dp_1}{(X_1 + U p_1)} = \ldots =$$
$$= -\frac{dp_n}{(X_n + U p_n)} = ds, \tag{35}$$

где $X_k = F_{x_k}$, $U = F_u$, $P_k = F_{p_k}$, а s — некоторый вещественный параметр

Система (35) имеет первый интеграл

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = C.$$

Все решения системы (35), одновременно удовлетворяющие соотношению $F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$, называются *характеристическими полосами*. Эти полосы образуют $(2n-1)$ — параметрическое семейство.

Положим, что мы проинтегрировали систему (35):

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \\ u &= u(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \\ p_k &= p_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$