дополняют эту кривую до характеристической полосы. Но если это условие выполнено, то существует бесчисленное множество интегральных поверхностей, содержащих эту полосу. Действительно, проведем некоторую полосу $C_1'$, которая имеет общий элемент с характеристической полосой $C_1$ и такая, что вдоль нее определитель (29) отличен от нуля. Через эту полосу проходит определенная интегральная поверхность, которая будет содержать всю полосу $C_1$, так как она содержит ее начальный элемент. Ввиду произвольности в выборе полосы $C_1'$, мы имеем бесчисленное множество интегральных поверхностей, содержащих полосу $C_1$.

Если вдоль заданной полосы определитель (29) равен нулю, но полоса не является характеристической, то не существует интегральной поверхности, содержащей эту начальную полосу и обладающей в ее окрестности непрерывными производными до второго порядка. Однако возможно, что существует интегральная поверхность, для которой кривая $l$ является особой кривой.

## § 3. Нелинейные дифференциальные уравнения с $n$ независимыми переменными

Изложенная в § 2 теория нелинейных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными непосредственно распространяется на уравнение с $n$ неизвестными переменными

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \left(p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{34}$$

Поэтому мы ограничимся лишь указанием результатов. Характеристическая система, соответствующая уравнению (34), имеет вид:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = -\frac{dp_1}{(X_1 + U p_1)} = \ldots =$$
$$= -\frac{dp_n}{(X_n + U p_n)} = ds, \tag{35}$$

где $X_k = F_{x_k}$, $U = F_u$, $P_k = F_{p_k}$, а $s$ — некоторый вещественный параметр

Система (35) имеет первый интеграл

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = C.$$

Все решения системы (35), одновременно удовлетворяющие соотношению $F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$, называются *характеристическими полосами*. Эти полосы образуют $(2n-1)$ — параметрическое семейство.

Положим, что мы проинтегрировали систему (35):

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \\ u &= u(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \\ p_k &= p_k(s, x_k^{(0)}, u^{(0)}, p_k^{(0)}), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

где $x_k^{(0)}$, $u^0$, $p_k^{(0)}$ — начальные значения функций при $s=0$. Будем считать, что эти начальные значения являются функциями $(n-1)$ параметров:

$$x_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ p_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{37}$$

Подставив это в (36), получим:

$$x_k = x_k(s, t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u_k = u_k(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_k = p_k(s, t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{38}$$

Если функциональный определитель

$$\Delta = \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(s, t_1, \ldots, t_{n-1})},$$

который, в силу первых из уравнений системы (35), может быть записан в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1, & \ldots, & P_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{39}$$

не обращается в нуль на начальном многообразии (37) (т. е. при $s=0$) и, следовательно, в силу непрерывности производных, не обращается в нуль в некоторой окрестности этого многообразия, то величины $s$, $t_1$, $\ldots$, $t_{n-1}$ в этой окрестности могут быть выражены через $x_1$, $\ldots$, $x_n$, подставляя эти выражения в $u=u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, получим определенную поверхность $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, содержащую начальное многообразие (37). Эта поверхность будет интегральной поверхностью уравнения (34), если функции (37) удовлетворяют $n$ соотношениям

$$\begin{gathered} F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0, \\ \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t_j} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^{(0)} \frac{\partial x_\nu^{(0)}}{\partial t_j} (j=1,2, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{40}$$

тождественно по $t_j$.

*Задача Коши состоит в отыскании интегральной поверхности уравнения* (34), *содержащей заданное* $(n-1)$*-мерное многообразие*

$$x_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1}),\ u^{(0)}\ t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{41}$$

Многообразие (41) дополним до многообразия (37), определив $p_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ из уравнений (40). Если при этом определитель (39) отличен от нуля вдоль такого многообразия, то указанный выше метод приводит к решению задачи Коши, и это решение единственно.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3-\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2-p_3^2)-u=0 \tag{42}$$

содержащую 2-мерное многообразие

$$x_1^{(0)}=t_1,\ x_2^{(0)}=t_2,\ x_3^{(0)}=0,\ u^{(0)}=\frac{1}{2}(t_2^2-t_1^2). \tag{43}$$

Дополним это многообразие, определив $p_1^{(0)}$, $p_2^{(0)}$, $p_3^{(0)}$ из уравнений

$$t_1p_1^{(0)}+t_2p_2^{(0)}-\frac{1}{2}(p_1^{(0)^2}+p_2^{(0)^2}-p_3^{(0)^2})-\frac{1}{2}(t_2^2-t_1^2)=0.$$

$$-t_1=p_1^{(0)}\cdot 1,\quad t_2=p_2^{(0)}\cdot 1.$$

Отсюда

$$p_1^{(0)}=-t_1\ \ p_2^{(0)}=t_2\ \ p_3^{(0)}=\sqrt{2}\,t_1, \tag{44}$$

Характеристическая система (35) имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_1-p_1}=\frac{dx_2}{x_2-p_2}=\frac{dx_3}{x_3+p_3}=\frac{du}{u-\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2-p_3^2)}=\frac{dp_1}{0}=\frac{dp_2}{0}=\frac{dp_3}{0}=ds,$$

и ее решение, выраженное через начальные данные, будет:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1=p_1^{(0)}+(x_1^{(0)}-p_1^{(0)})e^s,\ x_2=p_2^{(0)}+(x_2^{(0)}-p_2^{(0)})e^s\\
&x_3=-p_3^{(0)}+(x_3^{(0)}+p_3^{(0)})e^s,\ u=\frac{1}{2}(p_1^{(0)^2}+p_2^{(0)^2}-p_3^{(0)^2})(1-e^s)+\\
&\qquad\qquad +u^{(0)}e^s,\\
&p_1=p_1^{(0)},\ p_2=p_2^{(0)},\ p_3=p_3^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Подставив (43) и (44) в (45), получим:

$$x_1=-t_1+2t_1e^s,\ x_2=t_2,\ x_3=\sqrt{2}t_1(e^s-1),$$
$$u=\frac{1}{2}(t_2^2-t_1),\ p_1=-t_1,\ p_2=t_2,\ p_3=\sqrt{2}t_1.$$

Исключив $s$, $t_1$, $t_2$ из первых четырех уравнений, получим интегральную поверхность

$$u=\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}(x_1-\sqrt{2}x_3)^2.$$