ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний, например, задача о колебаниях струны, мембраны, газа, электромагнитных колебаниях и т. д. Характерной особенностью процессов, описываемых такими уравнениями, является конечная скорость их распространения.

Глава IV

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК К ИЗУЧЕНИЮ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

§ 1. Уравнение колебаний струны. Решение Даламбера

1. **Неограниченная струна.** Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{1}$$

Положим

$$\xi=x-at, \qquad \eta=x+at. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что $x-at=C_1$, $x+at=C_2$ — суть характеристики уравнения (1). Уравнение (1) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0,$$

или, переписав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0,$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi),$$

где $\omega(\xi)$ — произвольная функция ξ. Интегрируя полученное уравнение по ξ, рассматривая η как параметр, найдем, что

$$u = \int \omega(\xi)\, d\xi + \Theta_2(\eta),$$

где $\Theta_2(\eta)$ — произвольная функция η. Полагая теперь

$$\int \omega(\xi)\, d\xi = \Theta_1(\xi),$$

получим

$$u = \Theta_1(\xi) + \Theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным (x, t), будем иметь

$$u(x, t) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at). \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (3), есть решение уравнения (1), если Θ_1 и Θ_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение (3) уравнения (1) называется *решением Даламбера.*

Выясним физический смысл решения (3).

Рассмотрим сначала частный случай колебания струны, когда $\Theta_2 \equiv 0$, т. е. когда смещение струны определяется формулой

$$u_1 = \Theta_1(x - at). \tag{4}$$

Положим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = c$ струны, передвигается в положительном направлении оси Ox со скоростью a, т. е. его абсцисса меняется по закону $x = c + at$ или $x - at = c$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемое формулой (4), будет оставаться все время постоянным, равным $\Theta_1(c)$. Самое явление, описываемое функцией $u_1 = \Theta_1(x - at)$, называется *распространением прямой волны*. Таким образом, решение (4) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси x со скоростью a. Точно так же решение $u_2 = \Theta_2(x + at)$ представляет *обратную волну*, которая распространяется в отрицательном направлении оси x со скоростью a.

Таким образом, решение (3) является суммой прямой и обратной волн.

Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени t. Строим кривые

$$u_1 = \Theta_1(x), \quad u_2 = \Theta_2(x),$$

изображающие прямую и обратные волны в начальный момент времени $t = 0$, и затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно со скоростью a в разные стороны: $u_1 = \Theta_1(x)$ — вправо,

$u_2 = \Theta_2(x)$ — влево. Чтобы получить теперь график струны, достаточно построить алгебраические суммы ординат раздвинутых кривых.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость xOt, в которой ось Ox соответствует положению струны в начальный момент времени $t=0$. Всякая точка (x, t) нашей полуплоскости характеризует определенную точку x струны в определенный момент времени t. Нетрудно при этом найти графически те точки струны начальные возмущения которых дошли в момент времени t_0 до точки x_0. Это будут, согласно предыдущему, точки с абсциссами $x \pm at_0$, так как a есть скорость распространения колебаний. Для нахождения их на оси x достаточно провести через точку (x_0, t_0) две характеристики

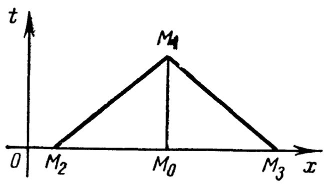

Рис. 3

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0 \tag{5}$$

и в пересечении их с осью Ox и получаются искомые точки (рис. 3).

Вдоль первой характеристики $\Theta_1(x - at)$ сохраняет постоянное значение, т. е. эта прямая дает те значения (x, t), при которых прямая волна дает то же отклонение, что и при значениях (x_0, t_0). Вторая характеристика из (5) играет ту же роль для обратной волны $\Theta_2(x + at)$. Можно сказать коротко, что возмущения распространяются по характеристикам.

2. **Задача Коши.** *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{6}$$

Ввиду неограниченности струны функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в $(-\infty, \infty)$.

В решении (3) уравнения (1) нужно выбрать функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ так, чтобы удовлетворить начальным условиям (6).

Из начальных условий (6) имеем:

$$\varphi_0(x) = \Theta_1(x) + \Theta_2(x), \quad \varphi_1(x) = -a\,[\Theta_0'(x) - \Theta_2'(x)],$$

откуда, интегрируя второе равенство, получим:

$$\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi_0(x), \quad \Theta_1(x) - \Theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + C, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная.

Из равенств (7) находим

$$
\begin{aligned}
\Theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + \frac{C}{2}, \\
\Theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz - \frac{C}{2}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Подставив (8) в (3), будем иметь

$$
u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \varphi_1(z)\,dz + \frac{C}{2} + \frac{\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \varphi_1(z)\,dz - \frac{C}{2},
$$

или окончательно

$$
u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\,dz. \tag{9}
$$

Формула (9) дает решение задачи Коши (1), (6), если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ — до первого.

Задача Коши (1), (6) поставлена *корректно*. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы (9). Несомненна далее непрерывная зависимость решения (9) от начальных данных. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если заменить $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на $\bar{\varphi}_0(x)$ и $\bar{\varphi}_1(x)$ так, что

$$
|\varphi_0(x) - \bar{\varphi}_0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1(x)| < \delta \quad (-\infty < x < \infty),
$$

то разность между новым решением $\bar{u}(x, t)$ и первоначальным $u(x, t)$ будет по абсолютной величине меньше ε на любом конечном отрезке времени. Это утверждение легко следует из формулы (9).

Рассмотрим два частных случая.

1) Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное смещение имеет место лишь в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$ струны, т. е. $\varphi_0(x) = 0$ вне этого промежутка. Решение (9) выражается при этом формулой

$$
u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}. \tag{10}
$$

Решение (10) является суммой двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$, равной половине начального смещения. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$, т. е. $x > \alpha$. При $t < \frac{x-\alpha}{a}$ из вида функции $\varphi_0(x)$ и формулы (10) следует, что $u(x, t) = 0$, т. е. до точки x волна еще не дошла. С момента времени $t = \frac{x-\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта прямой волны). При $t > \frac{x+\alpha}{a}$ из формулы (10) следует, что $u(x, t) = 0$. Моменту времени $t = \frac{x+\alpha}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта прямой волны через точку x, после чего в этой точке $u(x, t)$ обращается в нуль. Аналогичные рассуждения можно провести для точек струны, лежащих внутри промежутка $(-\alpha, \alpha)$ или левее его. Таким образом, в каждой точке струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального смещения, после прохождения только одной) наступает покой.

2) Начальное смещение равно нулю, а $\varphi_1(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение (9) принимает следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\, dz \tag{11}$$

или, полагая

$$\frac{1}{2a} \int_0^x \varphi_1(z)\, dz = \psi(x),$$

получим

$$u(x, t) = \psi(x + at) - \psi(x - at),$$

т. е. по струне распространяются две волны — одна прямая и одна обратная. Исследуем решение (11) более подробно. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$. При $t = 0$ промежуток интегрирования $(x - at, x + at)$ вырождается в точку x, а затем при увеличении t он расширяется в обе стороны со скоростью a. При $t < \frac{x-\alpha}{a}$ он не будет иметь общих точек с $(-\alpha, \alpha)$, функция $\varphi_1(z)$ в нем равна нулю, и формула (11) даст $u(x, t) = 0$, т. е. покой в точке x. Начиная с момента времени $t = \frac{x-\alpha}{a}$ промежуток $(x - at, x + at)$ будет налегать на $(-\alpha, \alpha)$, в котором $\varphi_1(z)$ отлична от нуля, и точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, при $t > \frac{x+\alpha}{a}$ промежуток $(x - at, x + at)$ будет содержать целиком промежуток $(-\alpha, \alpha)$, интегрирование по $(x - at, x + at)$ будет сводиться к интегрированию по $(-\alpha, \alpha)$, так как вне его $\varphi_1(z)=0$, т. е. при $t > \frac{x+\alpha}{a}$ мы имеем постоянное значение $u(x, t)$, равное

$$\frac{1}{2a}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_1(z)\,dz. \tag{12}$$

Момент времени $t=\frac{x+\alpha}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x.

Таким образом, действие начального импульса приводит к тому, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, длина которого выражается интегралом (12), и остаются без движения в этом новом положении. Волны оставляют после себя как бы след своего прохождения.

3) **Ограниченная струна.** Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=0, \quad u\,|_{x=l}=0 \tag{14}$$

и начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{15}$$

Решение Даламбера

$$u(x, t)=\Theta_1(x-at)+\Theta_2(x+at), \tag{16}$$

конечно, годится в этом случае, но определение Θ_1 и Θ_2 по формулам

$$\begin{aligned}\Theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz,\\ \Theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi_0(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\,dz\end{aligned} \tag{17}$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, а следовательно, $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$, определены лишь в промежутке $(0, l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $x\pm at$ в формуле (16) могут лежать и вне этого промежутка. Стало быть, для возможного применения решения (16) нужно продолжить функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0, l)$. С точки зрения физической, это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка $(0, l)$ было то же самое, как если бы он был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Для продолжения функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями (14). Подставляя в правую часть (16) $x=0$ и $x=l$ и принимая во внимание граничные условия (14), получим:

$$\Theta_1(-at)+\Theta_2(at)=0, \quad \Theta_1(l-at)+\Theta_2(l+at)=0$$

или, обозначая at через x,

$$\Theta_1(-x)=-\Theta_2(x), \ \ \Theta_2(l+x)=-\Theta_1(l-x). \tag{18}$$

Когда x изменяется в промежутке $(0, l)$, то первая из формул (18) определяет функцию $\Theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$, вторая — функцию $\Theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Стало быть, обе функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ вполне определяются на промежутке длины $2l$. Далее из равенств (18) следует, что

$$\Theta_2(2l+x)=-\Theta_1(-x)=\Theta_2(x), \quad \Theta_1(2l+x)=\Theta_1(x),$$

т. е. функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ являются функциями периодическими с периодом $2l$. Итак, функции $\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ определены при всех вещественных x.

Принимая во внимание, что

$$\varphi_0(x)=\Theta_1(x)+\Theta_2(x), \quad \varphi_1(x)=a\left[\Theta_2'(x)-\Theta_1'(x)\right],$$

найдем

$$\varphi_0(-x)=\Theta_1(-x)+\Theta_2(-x)=-\Theta_2(x)-\Theta_1(x)=-\varphi_0(x),$$
$$\varphi_1(-x)=a\left[\Theta_2'(-x)-\Theta_2'(-x)\right]=a\left[\Theta_1'(x)-\Theta_2'(x)\right]=-\varphi_1(x),$$
$$\varphi_0(x+2l)=\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x+2l)=\varphi_1(x).$$

Эти формулы показывают, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(-l, 0)$ нечетным образом, а затем с периодом $2l$.

Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, нужно, помимо условий дифференцируемости функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, потребовать еще выполнения условий

$$\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0, \quad \varphi_0''(0)=\varphi_0(l), \ \ \varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0.$$

Это есть условия согласования начальных и граничных условий.

Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к полуплоскости xOt. Ввиду ограниченности струны надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t>0$, заключающуюся между прямыми $x=0$ и $x=l$ (рис. 4). Проведем через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д. Мы разобьем, таким образом, полосу на области (I), (II), (III), ...

Точки области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят прямая и обратная волны, вошедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на процесс колебания не влияют.

Точки вне области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Возьмем, например, точку $M_0(x_0, t_0)$ в области (II). Так как

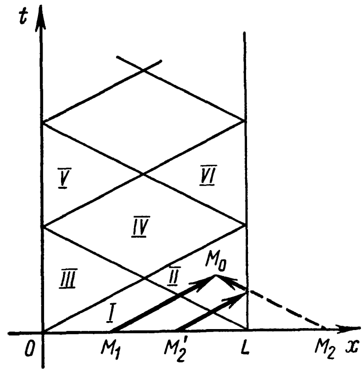

Рис. 4

$$u(x_0, t_0) = \Theta_1(x_0 - at_0) + \Theta_2(x_0 + at_0),$$

то в этой точке имеются две волны: одна — прямая, дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x = x_0 - at$, другая — обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_0 + at$, причем в данном случае M_1 есть реальная точка струны, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что, в силу (18),

$$\Theta_2(x_0 + at_0) = \Theta_2(l + x_0 + at_0 - l) = -\Theta_1(2l - x_0 - at_0),$$

и, таким образом, обратная волна $\Theta_2(x_0 + at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\Theta_1(2l - x_0 - at_0)$, вышедшая в начальный момент времени из точки $M_2'(2l - x_0 - at_0)$ (симметричной с M_2 относительно точки L), которая, дойдя до конца струны L в момент

$$t = \frac{l - (2l - x_0 - at_0)}{a} = \frac{x_0 + at_0 - l}{a},$$

изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t_0 дошла в таком виде до точки M_0.

Таким образом, действие закрепленного конца $x = l$ свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.

То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца $x = 0$; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x = 0$. В точках областей (IV), (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны.

Из предыдущих рассуждений следует, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом $\frac{2l}{a}$.