§ 2. Понятие об обобщенных решениях

Рассмотрим снова задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x).$$

Как было показано, решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\,dz.$$

Эта формула дает обычное (классическое) решение уравнения (1) только в предположении, что $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ — до первого.

При решении конкретных физических задач может оказаться, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не удовлетворяют указанным условиям. Тогда нельзя утверждать, что существует решение задачи Коши. В этом случае вводят так называемые «обобщенные решения» задачи Коши

Будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (1) при начальных условиях (6) функцию $u(x, t)$, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности решений $u_n(x, t)$ уравнения (1) при начальных условиях

$$u_n\Big|_{t=0} = \varphi_{n0}(x), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_{1n}(x),$$

если последовательность функций $\varphi_{n0}(x)$, имеющих непрерывные вторые производные, сходится равномерно к $\varphi_0(x)$, а последовательность функций $\varphi_{1n}(x)$, имеющих непрерывные первые производные, сходится равномерно к $\varphi_1(x)$.

Нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1) при любых непрерывных функциях $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$. Это обобщенное решение также дается формулой (9).

Введение обобщенных решений уравнения (1) естественно тем, что, во-первых, для существования обычного решения задачи Коши приходится на заданные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ налагать весьма жесткие условия гладкости, в то время как для существования обобщенных решений такой гладкости от заданных функций не требуется и, во-вторых, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в конкретных задачах физики известны нам только приближенно Поэтому соответствующая функция $u(x, t)$, даваемая формулой (9), также является только некоторым приближением к точному решению поставленной задачи.

Следовательно, совершенно безразлично, является ли это приближение обычным или обобщенным решением задачи Коши. Важно, что оно будет мало отличаться от истинного решения, если только функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ равномерно мало отличаются от истинных начальных значений $u(x, 0)$ и $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$.

ЗАДАЧИ

1. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени $t=0$ форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x=\frac{l}{2}$. Определить форму струны в моменты времени

$$t=\frac{l}{2a} \quad \text{и} \quad t=\frac{l}{a},$$

предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

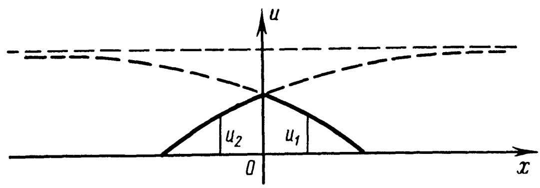

Рис. 5

2. Бесконечная струна, находящаяся в прямолинейном положении равновесия, получает в начальный момент времени ($t=0$) удар от молоточка, масса которого равна M, причем этот молоточек касается струны в точке $x=0$ и имеет начальную скорость V_0.

Доказать, что в любой момент времени $t>0$ возмущенная струна имеет вид, показанный на рис. 5, где u_1 — прямая волна:

$$u_1=\frac{MaV_0}{2T}\left\{1-e^{\frac{2T_0}{Ma^2}(x-at)}\right\} \text{ при } x-at<0;\; u_1=0 \text{ при } x-at>0,$$

и $u_2(x, t)$ — обратная волна:

$$u_2=\frac{MaV_0}{2T_0}\left\{1-e^{-\frac{2T_0}{Ma^2}(x+at)}\right\} \text{ при } x+at>0;\; u_2=0 \text{ при } x+at<0.$$

Указание. При интегрировании уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

следует принять во внимание условия

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}=M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}=-T_0\frac{\partial u_2}{\partial x}+T_0\frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}.$$