Глава V

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

§ 1. Дифференциальное уравнение продольных колебаний однородного стержня постоянного сечения. Начальные и граничные условия

Рассмотрим однородный стержень длины l, т. е. тело цилиндрической или какой-либо иной формы, для растяжения или изгибания которого надо приложить известное усилие. Последнее обстоятельство и отличает даже самый тонкий стержень от струны, которая, как мы знаем, гнется свободно.

В настоящей главе мы займемся приложением метода характеристик к изучению продольных колебаний стержня, причем ограничимся исследованием только таких колебаний, при которых поперечные сечения pq, перемещаясь вдоль оси стержня, остаются плоскими и параллельными друг другу (рис. 6). Подобное допущение оправдано, если поперечные размеры стержня будут невелики по сравнению с его длиной.

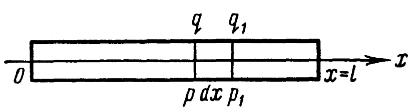

Рис. 6

Если несколько растянуть или сжать стержень вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут продольные колебания. Направим ось Ox вдоль оси стержня и будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках $x=0$ и $x=l$ Пусть x — абсцисса некоторого сечения стержня, когда последний находится в покое. Обозначим через $u(x, t)$ смещение этого сечения в момент времени t; тогда смещение сечения с абсциссой $x+dx$ будет равно

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

Отсюда ясно, что относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой x выражается производной

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Считая теперь, что стержень совершает малые колебания, можно вычислить в этом сечении натяжение T. Действительно, применяя закон Гука, найдем, что

$$T=ES\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости материала стержня, а S — площадь его поперечного сечения. Возьмем элемент стержня, заключенный между двумя сечениями, абсциссы которых в состоянии покоя соответственно равны x и $x+dx$. На этот элемент действуют силы натяжения T_x и T_{x+dx}, приложенные в этих сечениях, и направленные вдоль оси Ox. Результирующая этих сил имеет величину

$$T_{x+dx}-T_x=ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx}-ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\approx ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \tag{2}$$

и направлена также вдоль Ox. С другой стороны, ускорение элемента равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, вследствие чего мы можем написать равенство

$$\rho S\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx, \tag{3}$$

где ρ — объемная плотность стержня. Положив

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{4}$$

и сократив на $S\,dx$, получим дифференциальное уравнение *продольных колебаний однородного стержня*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Форма этого уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость a распространения продольных волн определяется формулой (4).

Если на стержень действует еще внешняя сила $F(x,\ t)$, рассчитанная на единицу его объема, то вместо (3) получим

$$\rho S\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+F(x,\ t)\,S\,dx,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}F(x,\ t). \tag{6}$$

Это есть уравнение *вынужденных* продольных колебаний стержня.

Как и вообще в динамике, одного уравнения движения (6) недостаточно для полного определения движения стержня. Нужно задать *начальные условия*, т. е. задать смещения сечений стержня и их скорости $\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}$ в начальный момент времени

$$u\big|_{t=0}=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x), \tag{7}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — заданные функции в интервале $(0,\ l)$.

Кроме того, должны быть заданы *граничные условия* на концах стержня. Так, например:

1) Стержень закреплен на обоих концах, т. е.

$$u(0,\ t)=0,\quad u(l,\ t)=0 \tag{8}$$

в любой момент времени t.

2) Один конец стержня закреплен, другой свободен, т. е.

$$u(0,\ t)=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{9}$$

в любой момент времени t. На свободном конце $x=l$ натяжение $T=ES\frac{\partial u}{\partial x}$ равно нулю (нет внешних сил) и, следовательно, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$.

3) Оба конца стержня свободны, т. е.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{10}$$

в любой момент времени t.

Таким образом, задача о продольных колебаниях однородного ограниченного стержня сводится к решению уравнения (6), удовлетворяющему начальным условиям (7) и одному из граничных условий (8), (9), (10).

§ 2. Колебания стержня с одним закрепленным концом

Решим в качестве примера следующую задачу. Упругий цилиндрический стержень, имеющий в нерастянутом (естественном) состоянии длину l, закрепляется в конце $x=0$ и затем растягивается за конец $x=l$ до длины l_1; после этого конец $x=l$ отпускается, вследствие чего в стержне образуются продольные колебания. Требуется определить скорость колебания произвольного сечения возмущенного стержня Для решения поставленной задачи надо найти решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям (9) и начальным условиям (7). Определим функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в начальные условия (7), считая, что в начальный момент времени смещение сечения с абсциссой x пропорционально этой абсциссе. Положим

$$u|_{t=0}=f(x)=rx\quad (0<x<l), \tag{11}$$

где r—множитель пропорциональности, который легко определяется, если принять во внимание то обстоятельство, что в начальный момент времени смещение на конце $x=l$ стержня равно l_1-l, т. е.

$$l_1-l=rl$$

или

$$r=\frac{l_1-l}{l}.$$