1) Стержень закреплен на обоих концах, т. е.

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \tag{8}$$

в любой момент времени t.

2) Один конец стержня закреплен, другой свободен, т. е.

$$u(0, t)=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{9}$$

в любой момент времени t. На свободном конце $x=l$ натяжение $T=ES\frac{\partial u}{\partial x}$ равно нулю (нет внешних сил) и, следовательно, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$.

3) Оба конца стержня свободны, т. е.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{10}$$

в любой момент времени t.

Таким образом, задача о продольных колебаниях однородного ограниченного стержня сводится к решению уравнения (6), удовлетворяющему начальным условиям (7) и одному из граничных условий (8), (9), (10).

§ 2. Колебания стержня с одним закрепленным концом

Решим в качестве примера следующую задачу. Упругий цилиндрический стержень, имеющий в нерастянутом (естественном) состоянии длину l, закрепляется в конце $x=0$ и затем растягивается за конец $x=l$ до длины l_1; после этого конец $x=l$ отпускается, вследствие чего в стержне образуются продольные колебания. Требуется определить скорость колебания произвольного сечения возмущенного стержня Для решения поставленной задачи надо найти решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям (9) и начальным условиям (7). Определим функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в начальные условия (7), считая, что в начальный момент времени смещение сечения с абсциссой x пропорционально этой абсциссе. Положим

$$u|_{t=0}=f(x)=rx \quad (0<x<l), \tag{11}$$

где r — множитель пропорциональности, который легко определяется, если принять во внимание то обстоятельство, что в начальный момент времени смещение на конце $x=l$ стержня равно l_1-l, т. е.

$$l_1-l=rl$$

или

$$r=\frac{l_1-l}{l}.$$

Кроме того, так как скорости всех промежуточных сечений стержня в начальный момент времени равны нулю, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad (0<x<l). \tag{12}$$

Итак, начальные условия имеют вид (11), (12).

Мы знаем, что общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u=\varphi(at-x)+\psi(at+x). \tag{13}$$

Определим функции φ и ψ так, чтобы оно удовлетворяло граничным условиям (9) и начальным условиям (11) и (12). Из первого граничного условия (9) следует, что

$$u\,|_{x=0}=\varphi(at)+\psi(at)=0$$

или

$$\psi(z)=-\varphi(z) \quad (z=at),$$

вследствие чего формула (13) принимает вид

$$u=\varphi(at-x)-\varphi(at+x). \tag{14}$$

Дифференцируя это равенство по x и полагая затем $x=l$, приходим, в силу второго из граничных условий (9), к следующему результату:

$$0=-\varphi'(at-l)-\varphi'(at+l)$$

или, обозначая переменный аргумент $at+l$ через z, получим равенство

$$\varphi'(z)=-\varphi'(z-2l), \tag{15}$$

с помощью которого легко найти выражение функции $\varphi'(z)$ для всех значений z.

В самом деле, в силу начальных условий (11) и (12) имеем

$$rx=\varphi(-x)-\varphi(x), \quad (0<x<l) \tag{16}$$

$$0=\varphi'(-x)-\varphi'(x). \tag{17}$$

Дифференцируя равенство (16) по x и решая полученное уравнение совместно с уравнением (17), найдем следующее выражение для функции $\varphi'(z)$:

$$\varphi'(z)=-\frac{r}{2}, \tag{18}$$

справедливое для всех значений z, лежащих в интервале

$$-l<z<l. \tag{19}$$

Тогда из формулы (15) следует, что

$$\varphi'(z)=\frac{r}{2} \tag{20}$$

3*

для всех значений z, удовлетворяющих неравенству

$$l < z < 3l. \tag{21}$$

Теперь остается заметить, что в силу равенства (15) функция $\varphi'(z)$ имеет период $4l$ и тогда из формул (18)—(21) ясно, что функция $\varphi'(z)$ определяется при всех значениях z.

Воспользуемся найденными результатами, чтобы представить себе картину распространения волн в возмущенном стержне. Обозначим через v скорость поперечного сечения стержня с абсциссой x; эта скорость находится на основании формулы (14), в силу которой

$$\frac{v}{a} = \varphi'(at - x) - \varphi'(at + x). \tag{22}$$

С помощью этой формулы нетрудно разобраться, какие волны подходят в определенные моменты времени к сечению P с абсциссой x. В самом деле, так как эта абсцисса лежит внутри интервала $(0, l)$, то, начиная с момента $t = 0$ до момента времени $t = \frac{l - x}{a}$, оба аргумента функций, входящих в правую часть формулы (22), не будут выходить за пределы интервала $(-l, l)$. Отсюда, в силу (18) и (22), вытекает, что

$$\frac{v}{a} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 0,$$

другими словами, в течение времени $t = \frac{l - x}{a}$, считая от момента начала колебаний, сечение P остается в покое. Оно начнет колебаться с момента $t = \frac{l - x}{a}$, когда к нему подойдет о б р а т н а я волна, вышедшая в начальный момент времени из возмущенного конца $x = l$.

Определим скорость сечения P. Когда время изменяется от момента $t = \frac{l - x}{a}$ до момента $t = \frac{l + x}{a}$, аргумент функции $\varphi'(at - x)$ изменяется в интервале $(-l, l)$, а аргумент функции $\varphi'(at + x)$ — в интервале $(l, 3l)$. Применяя формулы (18)—(22), получим, что в течение времени

$$t = \frac{l + x}{a} - \frac{l - x}{x} = \frac{2x}{a}$$

сечение P будет обладать скоростью, определяемой равенством

$$\frac{v}{a} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = -r.$$

Исследуем теперь, что будет происходить в стержне с момента времени $t = \frac{l + x}{a}$. К этому моменту к сечению P подойдет прямая волна, которая произошла от обратной волны, отразившейся в момент $t=\frac{l}{a}$ от закрепленного конца $x=0$.

Нетрудно показать, что с момента времени $t=\frac{l+x}{a}$ до момента $t=\frac{3l-x}{a}$ сечение P будет находиться в состоянии покоя. В самом деле, в течение указанного времени оба аргумента функций, входящих в формулу (22), лежат внутри интервала $(l, 3l)$; вследствие этого из формулы (20) вытекает, что

$$\frac{v}{a}=\frac{r}{2}-\frac{r}{2}=0.$$

В момент времени $t=\frac{3l-x}{a}$ к сечению P снова подойдет обратная волна, которая получилась от прямой волны, после того как последняя отразилась от свободного конца $x=l$ в момент $t=\frac{2l}{a}$. Эта волна будет оказывать свое действие на сечение P до момента времени $t=\frac{3l+x}{a}$. Действительно, когда t изменяется в пределах от $\frac{3l-x}{a}$ до $\frac{3l+x}{a}$, аргумент функции $\varphi'(at-x)$ не выходит из интервала $(l, 3l)$, а аргумент функции $\varphi'(at+x)$ — из интервала $(3l, 5l)$, вследствие чего

$$\frac{v}{a}=\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r.$$

Теперь остается лишь исследовать промежуток времени от $t=\frac{3l+x}{a}$ до $t=\frac{5l-x}{a}$. В течение этого времени сечение P снова придет в состояние покоя. Действительно, в момент времени $t=\frac{3l+x}{a}$ к этому сечению подойдет прямая волна, образовавшаяся из обратной волны, после того как последняя отразилась от закрепленного конца в момент времени $t=\frac{3l}{a}$. Действие этой волны на сечение P скажется следующим образом. Так как при t, изменяющемся в промежутке $\left(\frac{3l+x}{a}, \frac{5l-x}{a}\right)$, обе функции, стоящие в правой части равенства (22), имеют свои аргументы в интервале $(3l, 5l)$, то

$$\frac{v}{a}=-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=0,$$

откуда ясно, что в течение времени $t=\frac{2(l-x)}{a}$ сечение P будет находиться в состоянии покоя.

Далее вся картина распространения волн будет повторяться, так как, по замеченному выше, функция $\varphi'(z)$ имеет период $4l$.