§ 3. Продольный удар груза по стержню

Рассмотрим цилиндрический стержень, один конец ($x=0$) которого закреплен, а другой ($x=l$) свободен. В начальный момент времени $t=0$ свободный конец подвергается удару груза массы M, движущегося вдоль оси стержня со скоростью v. Изучим продольные колебания стержня, которые возникают при ударе по стержню.

Мы знаем, что уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right). \tag{23}$$

Граничное условие на левом конце ($x=0$) будет, очевидно,

$$u(0,\ t)=0. \tag{24}$$

Далее, уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении $x=l$ стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид

$$M\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}=-ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}. \tag{25}$$

Это и будет граничное условие на конце $x=l$. Уравнению (25) можно придать вид

$$ml\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}=-a^2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}, \tag{26}$$

если обозначить через $m=\frac{M}{\rho S l}$ отношение массы движущегося груза к массе стержня.

Искомое решение $u(x,\ t)$ должно удовлетворять также начальным условиям

$$u|_{t=0}=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant x<l, \quad \frac{\partial u}{\partial t}=-v \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{и} \quad x=l.$$

Второе начальное условие означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость, равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза.

Известно, что общее решение уравнения (23) имеет вид

$$u=\varphi(at-x)+\psi(at+x), \tag{28}$$

где φ и ψ — произвольные функции. Определим функции φ и ψ так, чтобы решение (28) удовлетворяло граничным условиям (24), (25) и начальным условиям (27).

Из граничного условия (24) следует, что $\psi=-\varphi$; тогда решение (28) принимает вид

$$u=\varphi(at-x)-\varphi(at+x). \tag{29}$$

Из начальных условий (27) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(-z)-\varphi(z)&=0, \\ \varphi'(-z)-\varphi'(z)&=0. \end{aligned} \quad (0 \leqslant z \leqslant l)$$

Отсюда следует, что $\varphi'(z)=0$, когда $-l < z < l$, т. е. в этом же интервале $\varphi(z)$ — постоянная, которую можно считать равной нулю. Следовательно, мы имеем

$$\varphi(z)=0 \quad (-l < z < l). \tag{30}$$

Определим теперь функцию $\varphi(z)$ вне интервала $(-l, l)$. Для этого воспользуемся граничным условием (26). Подставляя (29) в (26), получим

$$ml\,[\varphi''(at-l)-\varphi''(at+l)]=\varphi'(at-l)+\varphi'(at+l)$$

или, полагая $z=at+l$,

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=\varphi''(z-2l)-\frac{1}{ml}\varphi'(z-2l). \tag{31}$$

Это уравнение дает возможность продолжить функцию $\varphi(z)$ за пределы интервала $(-l, l)$. Из уравнения (31) сперва определим $\varphi'(z)$ вне интервала $(-l, l)$.

При $l < z < 3l$ правая часть уравнения (31) равна нулю и мы имеем

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=0,$$

откуда

$$\varphi'(z)=Ce^{-\frac{z}{ml}},$$

где C — произвольная постоянная.

Начальное условие (27) дает:

$$a\,[\varphi'(-l+0)-\varphi'(l+0)]=-v$$

или, в силу (30,,

$$\varphi'(l+0)=\frac{v}{a}.$$

Следовательно, $\frac{v}{a}=Ce^{-\frac{1}{m}}$, так что $C=\frac{v}{a}e^{\frac{1}{m}}$ и

$$\varphi'(z)=\frac{v}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}} \quad (l < z < 3l). \tag{32}$$

Заметим, что $\varphi'(z)$ в точке $z=l$ имеет разрыв непрерывности.

При $3l < z < 5l$ уравнение (31) принимает вид

$$\varphi''(z)+\frac{1}{ml}\varphi'(z)=-\frac{2v}{aml}e^{-\frac{z-3l}{ml}},$$

откуда

$$\varphi'(z)=Ce^{-\frac{z}{ml}}-\frac{2v}{aml}(z-3l)\,e^{-\frac{z-3l}{ml}}, \tag{33}$$

где C — произвольная постоянная.

Произвольную постоянную C мы найдем из условия непрерывности изменения скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ в сечении $x=l$ при $t>0$, в частности при $t=\frac{2l}{a}$. Это дает

$$\varphi'(l-0)-\varphi'(3l-0)=\varphi'(l+0)-\varphi'(3l+0)$$

или, в силу (30), (32) и (33),

$$-\frac{v}{a}e^{-\frac{2}{m}}=\frac{v}{a}-Ce^{-\frac{3}{m}},$$

откуда

$$C=\frac{v}{a}\left(e^{\frac{1}{m}}+e^{\frac{3}{m}}\right). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33), получим

$$\varphi'(z)=\frac{v}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}}+\frac{v}{a}\left[1-\frac{2}{ml}(z-3l)\right]e^{-\frac{z-3l}{ml}}\quad (3l<z<5l). \tag{35}$$

Поступая далее таким же образом, мы можем найти $\varphi'(z)$ в интервалах $(5l,\ 7l)$, $(7l,\ 9l)$ и т. д.

Функция $\varphi(z)$ определяется интегрированием выражения $\varphi'(z)$; постоянная интегрирования определяется из условия непрерывности функции $u(x,\ t)$ в точке $x=l$. Это условие, если положить t последовательно равным 0, $\frac{2l}{a}$, ..., дает уравнения

$$0=\varphi(-l+0)-\varphi(l+0),$$
$$\varphi(l-0)-\varphi(3l-0)=\varphi(l+0)-\varphi(3l+0),\ \ldots$$

откуда, в силу (30), получаем

$$\varphi(l+0)=\varphi(-l+0)=0,\quad \varphi(3l+0)=\varphi(3l-0),\ \ldots$$

Таким образом, мы имеем

$$\varphi(z)=\frac{mlv}{a}\left(1-e^{-\frac{z-l}{ml}}\right)\quad (l<z<3l),$$

$$\varphi(z)=-\frac{mlv}{a}e^{-\frac{z-l}{ml}}+\frac{mlv}{a}\left[1+\frac{2}{ml}(z-3l)\right]e^{-\frac{z-3l}{ml}} \tag{36}$$
$$(3l<z<5l),\ \ldots$$

Из полученного решения (29), (30) и (36) следует, что при $0 < t < \frac{l}{a}$, в силу (30), $\varphi(at - x) = 0$ и из (29) имеем

$$u(x, t) = -\varphi(at + x),$$

т. е. по стержню распространяется только обратная волна, идущая от конца $x = l$, подвергнувшегося удару; при $t = \frac{l}{a}$ она достигнет закрепленного конца и при $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ к ней прибавится отраженная волна $\varphi(at - x)$, т. е. решение будет иметь вид

$$u(x, t) = \varphi(at - x) - \varphi(at + x).$$

При $t = \frac{2l}{a}$ волна $\varphi(at - x)$ отразится от конца $x = l$, так что слагаемое $\varphi(at + x)$ в решении (29) на интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ будет иметь уже другое выражение. Таким образом $u(x, t)$ имеет различные выражения в интервалах

$$0 < t < \frac{l}{a}, \ \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}, \ \ldots, n\frac{l}{a} < t < (n+1)\frac{l}{a}.$$

В изложенном выше решении мы считали, что стержень как бы соединяется с ударяющим телом, так что условие (25) выполняется для любого момента времени $t > 0$. Но если тело отделяется от стержня, то полученное решение пригодно только на тот промежуток времени, пока $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} < 0$. Когда же в этом решении $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $x = l$ становится положительным, соударение оканчивается.

При $0 < t < \frac{2l}{a}$ $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} < 0$ и акт соударения не может закончиться.

При $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{at}{ml}} \left[1 + 2e^{\frac{2}{m}}\left(1 - \frac{at - 2l}{ml}\right)\right]$$

и $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x}$ становится положительным, когда

$$\frac{2at}{ml} = \frac{4}{m} + 2 + e^{-\frac{m}{2}};$$

последнее уравнение может иметь в интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ корень при условии, что

$$2 + e^{-\frac{m}{2}} < \frac{4}{m}.$$

Уравнение

$$2+e^{-\frac{m}{2}}=\frac{4}{m}$$

имеет корень $m=1,73\ \ldots$

Если $m<1,73\ \ldots$, соударение прекращается в момент времени t, который лежит в интервале $\left(\frac{2l}{a},\ \frac{4l}{a}\right)$ и определяется по формуле

$$t=\frac{l}{a}\left(2+m+\frac{1}{2}me^{-\frac{2}{m}}\right).$$

Если $m>1,73\ \ldots$, то можно таким же способом проверить, заканчивается ли соударение в момент времени t, лежащий в интервале $\left(\frac{4l}{a},\ \frac{6l}{a}\right)$.

ЗАДАЧИ

1. На конце $x=0$ цилиндрического стержня, настолько длинного, что его можно считать простирающимся в одну сторону до бесконечности, действует возмущающая гармоническая сила $A\sin\omega t$. Доказать, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается формулой

$$u(x,\ t)=\begin{cases} 0 & \text{при } at\leqslant x, \\ A\sin\frac{\omega}{a}(at-x) & \text{при } at\geqslant x. \end{cases}$$

Указание. Применить метод характеристик к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при краевом условии $u|_{x=0}=A\sin\omega t$ и при нулевых начальных условиях для положительных x

2. Вывести дифференциальное уравнение продольных колебаний конического стержня.

Ответ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\left(a^2=\frac{E}{\rho}\right),\tag{37}$$

где h — высота полного конуса, частью которого является стержень.

3. Один конец стержня ($x=0$) формы усеченного конуса закреплен, а другой ($x=l$) свободен. В начальный момент времени $t=0$ свободный конец подвергается удару груза массы M, движущегося вдоль оси стержня со скоростью v. Найти продольные колебания конического стержня.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(at-x)-\varphi(at+x)}{h-x}.$$

Функция $\varphi(z)$ определяется следующим образом:

$$\varphi(z)=0\qquad(-l<z<l)$$

$$\varphi(z)=\frac{v(h-l)}{a}\,\frac{e^{k_1(z-l)}-e^{k_2(z-l)}}{k_1-k_2}\qquad(l<z<3l)$$

и т. д., где k_1 и k_2 — корни уравнения

$$k^2+\frac{k}{m}+\frac{1}{m(h-l)}=0, \qquad m=\frac{M}{pSl}.$$

Уравнение для продолжения функции $\varphi(z)$ вне интервала $(-l, l)$ имеет вид

$$m\varphi''(z)+\varphi'(z)+\frac{\varphi(z)}{h-l}=m\varphi''(z-2l)-\varphi'(z-2l)+\frac{\varphi(z-2l)}{h-l}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения (37) при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=0, \quad m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-a^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \text{ при } 0\leqslant x<l, \ \frac{\partial u}{\partial t}=-v \text{ при } t=0 \text{ и } x=l.$$

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 1. Задача Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)\,u=f(x, y). \tag{1}$$

К такому виду, как мы видели в гл. II, § 3, приводится линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными ($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — непрерывные функции).

Уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=0.$$

Эти уравнения имеют соответственно решения y и x. Следовательно, $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ — суть характеристики уравнения (1).

Пусть в плоскости xOy дана дуга кривой l, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат. Уравнение этой дуги может быть записано в виде $y=g(x)$ или $x=h(y)$. Будем считать, что существуют производные $g'(x)$ и $h'(x)$, отличные от нуля.

Пусть вдоль дуги кривой l заданы значения u и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$u\bigg|_{y=g(x)}=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=g(x)}=\varphi_1(x). \tag{2}$$