и т. д., где k_1 и k_2 — корни уравнения

$$k^2+\frac{k}{m}+\frac{1}{m(h-l)}=0, \qquad m=\frac{M}{pSl}.$$

Уравнение для продолжения функции $\varphi(z)$ вне интервала $(-l,\ l)$ имеет вид

$$m\varphi''(z)+\varphi'(z)+\frac{\varphi(z)}{h-l}=m\varphi''(z-2l)-\varphi'(z-2l)+\frac{\varphi(z-2l)}{h-l}.$$

Указание. Задача приводится к решению уравнения (37) при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=0, \quad m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-a^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=0 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant l, \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \text{ при } 0\leqslant x<l, \ \frac{\partial u}{\partial t}=-v \text{ при } t=0 \text{ и } x=l.$$

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 1. Задача Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)\,u=f(x,\ y). \tag{1}$$

К такому виду, как мы видели в гл. II, § 3, приводится линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными ($a(x,\ y)$, $b(x,\ y)$, $c(x,\ y)$ и $f(x,\ y)$ — непрерывные функции).

Уравнение характеристик для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=0.$$

Эти уравнения имеют соответственно решения y и x. Следовательно, $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ — суть характеристики уравнения (1).

Пусть в плоскости xOy дана дуга кривой l, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат. Уравнение этой дуги может быть записано в виде $y=g(x)$ или $x=h(y)$. Будем считать, что существуют производные $g'(x)$ и $h'(x)$, отличные от нуля.

Пусть вдоль дуги кривой l заданы значения u и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$u\bigg|_{y=g(x)}=\varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=g(x)}=\varphi_1(x). \tag{2}$$

Данные Коши (2) позволяют на кривой $y=g(x)$ найти значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Действительно, дифференцируя по x первое из условий (2), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=g(x)}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=g(x)}\cdot g'(x)=\varphi_0'(x),$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=g(x)}=\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)\,g'(x)=\omega(x). \qquad (3)$$

Задача Коши ставится так: *требуется найти решение уравнения* (1) *в некоторой окрестности кривой* l, *удовлетворяющее данным Коши* (2).

Введем функции

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w=\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (1) равносильно системе трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y}&=f(x,\ y)-av-bw-cu,\\ \frac{\partial w}{\partial x}&=f(x,\ y)-av-bw-cu,\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=w.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

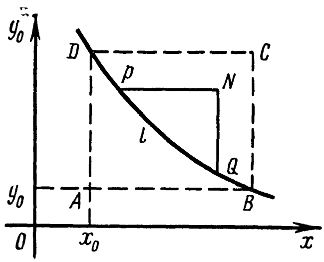

Рис. 7

Возьмем в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 7) произвольную точку $N(x,\ y)$ и проведем через нее характеристики NP и NQ до пересечения с кривой l. Интегрируя первое и третье уравнения системы (5) по прямой QN, а второе — по PN и принимая во внимание (2), (3) и (4), получим:

$$\left.\begin{aligned}v(x,\ y)&=\omega(x)+\int_{g(x)}^{y}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dy,\\ w(x,\ y)&=\varphi_1(x)+\int_{h(y)}^{x}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dx,\\ u(x,\ y)&=\varphi_0(x)+\int_{g(x)}^{y}w(x,\ y)\,dy.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Очевидно, что если $u(x,\ y)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее данным Коши (2), то функции v, w и u удовлетворяют системе интегральных уравнений (6). Обратно, непрерывное решение $(u,\ v,\ w)$ системы уравнений (6) удовлетворяет, очевидно, системе дифференциальных уравнений (5), а функция $u(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Действительно, из третьего уравнения системы (6) имеем $\frac{\partial u}{\partial y}=w$. Кроме того, в силу

(4), (5), (3) и первого уравнения (6),

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_0'(x)-w(x,\ y)\Big|_{y=g(x)}\cdot g'(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dy=$$

$$=\varphi_0'(x)-\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=g(x)}\cdot g'(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dy=$$

$$=\omega(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dy=v.$$

Следовательно, оба уравнения (4) выполняются. Подставляя теперь (4) в первое уравнение системы (5), мы убеждаемся, что функция $u(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению (1). Легко видеть что $u(x,\ y)$ удовлетворяет и данным Коши (2).

Таким образом, задача Коши (1)—(2) свелась к доказательству существования непрерывного решения системы интегральных уравнений (6).

Решение системы (6) будем искать методом последовательных приближений. За нулевое приближение берем

$$v_0=\omega(x),\quad w_0=\varphi_1(x)\quad u_0=\varphi_0(x),$$

и следующие приближения вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&v_n(x,\ y)=\omega(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x,\ y)-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]\,dy,\\
&w_n(x,\ y)=\varphi_1(x)+\int\limits_{h(y)}^{x}[f(x,\ y)-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]\,dx,\\
&u_n(x,\ y)=\varphi_0(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}w_{n-1}(x,\ y)\,dy.\\
&(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{v_n,\ w_n,\ u_n\}$ в криволинейном треугольнике BCD (рис. 7).

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{n+1}-v_n=\\
&=-\int\limits_{g(x)}^{y}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]\,dy,\\
&w_{n+1}-w_n=\\
&=-\int\limits_{h(y)}^{x}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]\,dx.\\
&u_{n+1}-u_n=\int\limits_{g(x)}^{y}(w_n-w_{n-1})\,dy.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Покажем, что разности $|v_n - v_{n-1}|$, $|w_n - w_{n-1}|$, $|u_n - u_{n-1}|$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |v_n - v_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |w_n - w_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ |u_n - u_{n-1}| &\leqslant K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $M = \max\limits_{BCD} [|a| + |b| + |c|]$, $K = \max(1, M)$ и A — некоторая постоянная.

При $n = 1$ справедливость (9) очевидна, если выбрать A достаточно большой. Покажем, что эти неравенства останутся справедливыми при замене n на $n + 1$. Из равенства (8) имеем, например,

$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant \int\limits_{g(x)}^{y} (|a| + |b| + |c|) K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy \leqslant$$

$$\leqslant K^n A \int\limits_{y_0}^{y} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy = K^n A \left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(x_0-y_0)^n}{n!}\right] \leqslant K^n A \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} \ (x > x_0,\ y_0 \leqslant g(x) \leqslant b).$$

Точно так же оцениваются и другие разности $|w_{n+1} - w_n|$ и $|u_{n+1} - u_n|$. Из оценок (9) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1}), \quad w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1}),$$

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1}),$$

члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$A + A \sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} = A\left(1 + e^{K(x+y-x_0-y_0)}\right).$$

Следовательно, последовательные приближения v_n, w_n и u_n в криволинейном треугольнике BCD равномерно стремятся соответственно к определенным пределам v, w и u. Предельные функции непрерывны, так как все последовательные приближения непрерывны. Переходя к пределу в формулах (7), мы получим, что предельные функции $v(x, y)$, $w(x, y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют системе (6).

Единственность решения системы (6). Допустим, что существуют два различных непрерывных решения системы (6)

v_1, w_1, u_1 и v_2, w_2, u_2. Обозначим $V=v_1-v_2$, $W=w_1-w_2$, $U=u_1-u_2$. Тогда V, W, U удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} V(x, y) &= -\int\limits_{g(x)}^{y} (aV+bW+cU)\,dy, \\ W(x, y) &= -\int\limits_{h(y)}^{x} (aV+bW+cU)\,dx, \\ U(x, y) &= \int\limits_{g(x)}^{y} W(x, y)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Нужно доказать, что $V=W=U=0$. Функции V, W и U непрерывны и ограничены, как разности непрерывных функций в замкнутом криволинейном треугольнике BCD. Значит, существует такая постоянная B, что

$$|V| \leqslant B, \quad |W| \leqslant B, \quad |U| \leqslant B.$$

Из (10) имеем:

$$|V(x, y)| \leqslant \int\limits_{g(x)}^{y} (|a|+|b|+|c|)\,B\,dy \leqslant KB(y-y_0) \leqslant$$

$$\leqslant KB\,\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

$$|W(x, y)| \leqslant KB\,\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

$$|U(x, y)| \leqslant KB\,\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!}.$$

Применив метод математической индукции, получим следующие оценки

$$|V| \leqslant K^n B\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \qquad |W| \leqslant K^n B\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|U| \leqslant K^n B\,\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}$$

для любого n. Отсюда следует, что $V=W=U=0$, т. е. $v_1=v_2$, $w_1=w_2$, $u_1=u_2$.

§ 2. Задача Гурса

Требуется найти решение уравнения (1), принимающее заданные значения на характеристиках $x=x_0$ и $y=y_0$:

$$\begin{aligned} u\,|_{x=x_0} &= \varphi_1(y), \quad y_0 \leqslant y \leqslant b, \\ u\,|_{y=y_0} &= \varphi_2(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant a. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем считать, что $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка и $\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0)$.