v_1, w_1, u_1 и v_2, w_2, u_2. Обозначим $V=v_1-v_2$, $W=w_1-w_2$, $U=u_1-u_2$. Тогда V, W, U удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} V(x, y) &= -\int_{g(x)}^{y}(aV+bW+cU)\,dy, \\ W(x, y) &= -\int_{h(y)}^{x}(aV+bW+cU)\,dx, \\ U(x, y) &= \int_{g(x)}^{y} W(x, y)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Нужно доказать, что $V=W=U=0$. Функции V, W и U непрерывны и ограничены, как разности непрерывных функций в замкнутом криволинейном треугольнике BCD. Значит, существует такая постоянная B, что

$$|V|\leqslant B, \quad |W|\leqslant B, \quad |U|\leqslant B.$$

Из (10) имеем:

$$|V(x, y)|\leqslant \int_{g(x)}^{y}(|a|+|b|+|c|)\,B\,dy\leqslant KB(y-y_0)\leqslant$$
$$\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$
$$|W(x, y)|\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$
$$|U(x, y)|\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!}.$$

Применив метод математической индукции, получим следующие оценки

$$|V|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \qquad |W|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$
$$|U|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}$$

для любого n. Отсюда следует, что $V=W=U=0$, т. е. $v_1=v_2$, $w_1=w_2$, $u_1=u_2$.

§ 2. Задача Гурса

Требуется найти решение уравнения (1), принимающее заданные значения на характеристиках $x=x_0$ и $y=y_0$:

$$\begin{aligned} u|_{x=x_0} &= \varphi_1(y), \quad y_0\leqslant y\leqslant b, \\ u|_{y=y_0} &= \varphi_2(x), \quad x_0\leqslant x\leqslant a. \end{aligned} \tag{11}$$

Будем считать, что $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка и $\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0)$.

Введем, как и в случае задачи Коши,

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) равносильно системе трех уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial y}=f(x, y)-a(x, y)v-b(x, y)w-c(x, y)u, \\ \frac{\partial w}{\partial x}=f(x, y)-a(x, y)v-b(x, y)w-c(x, y)u, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=w.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда, в силу (11) и (12), следует, что

$$\left.\begin{aligned} v(x, y)&=\varphi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dy, \\ w(x, y)&=\varphi_1'(y)+\int_{x_0}^{x}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dx, \\ u(x, y)&=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y}w\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Как и в случае задачи Коши, доказывается, что задача Гурса (1), (11) сводится к доказательству существования непрерывного решения системы интегральных уравнений (14). Как и выше, существование и единственность системы (14) доказывается методом последовательных приближений.

§ 3. Метод Римана

В этом параграфе мы выведем интегральную формулу, выражающую в явном виде искомое решение задачи Коши через начальные данные. Существование решения при этом заранее предполагается.

Наряду с дифференциальным выражением второго порядка

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u,$$

коэффициенты которого a и b непрерывно дифференцируемы, рассмотрим сопряженное ему дифференциальное выражение

$$L^*(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv.$$

Уравнение $L^*(v)=g$ называют сопряженным с уравнением $L(u)=f$. Имеет место тождество

$$\begin{gathered} vL(u)-uL^*(v)= \\ =\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right), \end{gathered} \tag{15}$$