Введем, как и в случае задачи Коши,

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) равносильно системе трех уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}=f(x,\ y)-a(x,\ y)v-b(x,\ y)w-c(x,\ y)u,\\ &\frac{\partial w}{\partial x}=f(x,\ y)-a(x,\ y)v-b(x,\ y)w-c(x,\ y)u, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=w.\end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда, в силу (11) и (12), следует, что

$$\left.\begin{aligned}&v(x,\ y)=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dy,\\ &w(x,\ y)=\varphi_1'(y)+\int\limits_{x_0}^{x}[f(x,\ y)-av-bw-cu]\,dx,\\ &u(x,\ y)=\varphi_2(x)+\int\limits_{y_0}^{y}w\,dy.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Как и в случае задачи Коши, доказывается, что задача Гурса (1), (11) сводится к доказательству существования непрерывного решения системы интегральных уравнений (14). Как и выше, существование и единственность системы (14) доказывается методом последовательных приближений.

§ 3. Метод Римана

В этом параграфе мы выведем интегральную формулу, выражающую в явном виде искомое решение задачи Коши через начальные данные. Существование решения при этом заранее предполагается.

Наряду с дифференциальным выражением второго порядка

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)u,$$

коэффициенты которого a и b непрерывно дифференцируемы, рассмотрим сопряженное ему дифференциальное выражение

$$L^*(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial(av)}{\partial x}-\frac{\partial(bv)}{\partial y}+cv.$$

Уравнение $L^*(v)=g$ называют сопряженным с уравнением $L(u)=f$. Имеет место тождество

$$vL(u)-uL^*(v)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}+2buv\right), \tag{15}$$

которое легко проверяется с помощью непосредственного дифференцирования.

Обозначим через Ω область, ограниченную дугой PQ кривой l и двумя прямыми, параллельными осям и выходящими из фиксированной точки $M(x_0, y_0)$ (рис. 8). Интегрируя обе части тождества (15) по области Ω и пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\iint_{\Omega} [vL(u) - uL^*(v)]\,dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right)dx +$$
$$+ \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy, \qquad (16)$$

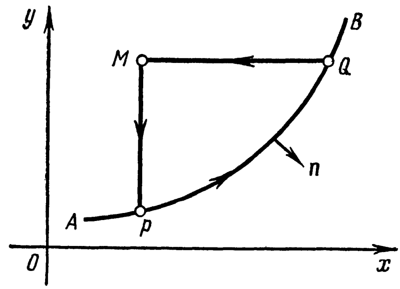

Рис. 8

где контур Γ состоит из трех частей: характеристик QM и MP и дуги PQ.

Рассмотрим интегралы, взятые вдоль характеристик QM и MP. Так как вдоль характеристики QM меняется только y, то при интегрировании по QM получим интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{QM} \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int_{QM} \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy = \frac{1}{2}(uv)\Big|_Q^M - \int_{QM} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy. \quad (17)$$

Совершенно также найдем, что

$$\frac{1}{2}\int_{MP} \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right)dx = -\frac{1}{2}(uv)\Big|_M^P + \int_{MP} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx. \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в формулу (16), получим

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ} \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - 2buv\right)dx +$$
$$+ \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)dy + \int_{QM} u\left(\frac{\partial v}{\partial y} - av\right)dy +$$
$$+ \int_{PM} u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - bv\right)dx + \iint_{\Omega} [vL(u) - uL^*(v)]\,dx\,dy. \qquad (19)$$

Положим теперь, что u есть решение уравнения (1), удовлетворяющее данным Коши (2), а v — решение однородного сопряженного уравнения

$$L^*(v)=0, \tag{20}$$

удовлетворяющее условиям

$$v|_{x=x_0}=e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0,\, y)\,dy}, \quad v|_{y=y_0}=e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x,\, y_0)\,dx} \tag{21}$$

Это решение будет зависеть, конечно, от выбора точки (x_0, y_0), т. е. по существу оно будет функцией пары точек. Поэтому примем обозначение $v=v(x, y; x_0, y_0)$.

Из (21) имеем

$$\frac{\partial v(x_0, y; x_0, y_0)}{\partial y}=a(x_0, y)\,v(x_0, y; x_0, y_0) \tag{22}$$

на характеристике MP;

$$\frac{\partial v(x, y_0; x_0, y_0)}{\partial x}=b(x, y_0)\,v(x, y_0; x_0, y_0)$$

на характеристике MQ;

$$v(x_0, y_0; x_0, y_0)=1.$$

Решение $v=v(x, y; x_0, y_0)$ однородного сопряженного уравнения (20), удовлетворяющее условиям (22), называется *функцией Римана.* Эта функция не зависит ни от данных Коши (2) на l, ни от вида этой кривой. Для нее точка (x, y) играет роль аргумента, а точка (x_0, y_0) — роль параметра. Существование и единственность функции Римана следует из § 2 этой главы.

Если теперь в формуле (19) заменить v функцией Римана $v(x, y; x_0, y_0)$, то, принимая во внимание уравнение (1) и условие (22), мы получим формулу Римана

$$u(x_0, y_0)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{PQ}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}-2buv\right)dx+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}+2auv\right)dy+$$
$$+\iint\limits_{\Omega} vf\,dx\,dy. \tag{23}$$

Формула Римана (23) дает представление решения уравнения (1) для произвольных начальных данных, заданных на произвольной нехарактеристической кривой l, через функцию Римана $v(x, y; x_0, y_0)$. Из самого способа получения формулы Римана следует, что если задача Коши (1)—(2) имеет решение, то оно единственно.

Из формулы (23) непосредственно вытекает, что если достаточно мало изменить данные Коши на кривой l, то и решение задачи изменится на сколь угодно малую величину, т. е. *решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных*. Из формулы (23) также следует, что значение решения u в точке M зависит только от начальных данных вдоль дуги PQ кривой l, вырезаемой из l характеристиками, выходящими из точки M. Если изменить данные Коши на кривой l вне дуги PQ, сохраняя непрерывность в точках P и Q, то решение будет меняться лишь вне криволинейного треугольника MPQ. Таким образом, каждая характеристика отделяет область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Следовательно, за всякую характеристическую линию решения уравнения продолжаются не однозначно.

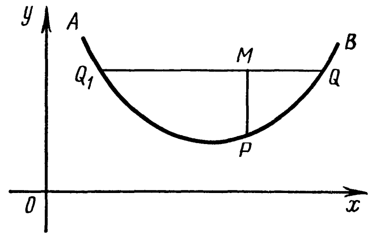

Рис. 9

Сделанное выше предположение о том, что прямые, параллельные осям, т. е. характеристики, пересекают линию l не более чем в одной точке, является существенным. При невыполнении этого условия задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Пусть, например, кривая l имеет вид, указанный на рис. 9. Применив метод Римана, мы можем определить значение искомой функции $u(x, y)$ в точке M, пользуясь или криволинейным треугольником PQM, или криволинейным треугольником Q_1PM. Полученные две формулы дадут, вообще говоря, в точке M разные значения для u, и, таким образом, задача Коши окажется неразрешимой.

§ 4. Примеры на приложение метода Римана

Пример 1. Найти решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{24}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x). \tag{25}$$

С помощью замены переменных

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x} \tag{26}$$

уравнение (24) приводится к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{27}$$