изменится на сколь угодно малую величину, т. е. *решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных*. Из формулы (23) также следует, что значение решения u в точке M зависит только от начальных данных вдоль дуги PQ кривой l, вырезаемой из l характеристиками, выходящими из точки M. Если изменить данные Коши на кривой l вне дуги PQ, сохраняя непрерывность в точках P и Q, то решение будет меняться лишь вне криволинейного треугольника MPQ. Таким образом, каждая характеристика отделяет область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Следовательно, за всякую характеристическую линию решения уравнения продолжаются не однозначно.

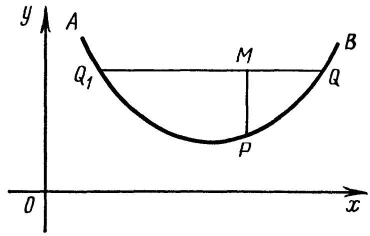

Рис. 9

Сделанное выше предположение о том, что прямые, параллельные осям, т. е. характеристики, пересекают линию l не более чем в одной точке, является существенным. При невыполнении этого условия задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Пусть, например, кривая l имеет вид, указанный на рис. 9. Применив метод Римана, мы можем определить значение искомой функции $u(x, y)$ в точке M, пользуясь или криволинейным треугольником PQM, или криволинейным треугольником Q_1PM. Полученные две формулы дадут, вообще говоря, в точке M разные значения для u, и, таким образом, задача Коши окажется неразрешимой.

§ 4. Примеры на приложение метода Римана

Пример 1. Найти решение уравнения

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{24}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x). \tag{25}$$

С помощью замены переменных

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x} \tag{26}$$

уравнение (24) приводится к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{27}$$

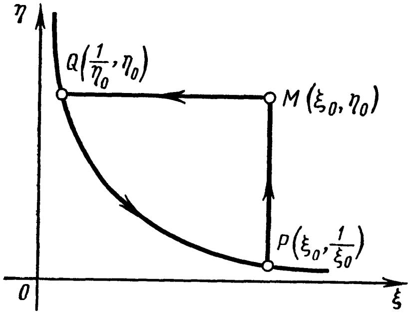

Рис. 10

Прямая $y=1$ в новых переменных будет иметь вид равнобочной гиперболы (рис. 10)

$$\xi\eta = 1. \tag{28}$$

Далее из соотношений

$$x = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}$$

ясно, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\xi}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\xi\eta=1},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\xi}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\xi\eta=1}.$$

Следовательно, в силу условий (25), имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi), \tag{29}$$

а также

$$u|_{\xi\eta=1} = f(\xi). \tag{30}$$

Полагая в формуле Римана (23) $a=0$, $b=-\frac{1}{2\xi}$, $f=0$, получим

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{QP}\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{uv}{\xi}\right)d\xi -$$

$$-\left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)d\eta. \tag{31}$$

Обратимся теперь к разысканию функции Римана $v(\xi;\ \eta;\ \xi_0,\ \eta)$. Согласно общей теории, она должна удовлетворять сопряженному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \tag{32}$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = e^{-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi}{2\xi}} = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \quad (\text{на } MQ), \tag{33}$$

$$v(\xi_0,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = e^{\int\limits_{\eta^0}^{\eta} 0\cdot d\eta} = 1 \quad (\text{на } MP).$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \tag{34}$$

удовлетворяет как уравнению (32), так и обоим условиям (33), следовательно, это и есть искомая функция Римана. Подставляя (29), (30) и (34) в формулу

(31) и принимая во внимание, что

$$u(P)=f(\xi_0),\quad u(Q)=f\left(\frac{1}{\eta_0}\right),\quad v(P)=v\left(\xi_0,\ \frac{1}{\xi_0};\ \xi_0,\ \eta_0\right)=1,$$

$$v(Q)=v\left(\frac{1}{\eta_0},\ \eta_0;\ \xi_0,\ \eta_0\right)=\sqrt{\xi_0\eta_0},$$

получим

$$u(\xi_0,\ \eta_0)=\frac{f(\xi_0)}{2}+\frac{\sqrt{\xi_0\eta_0}}{2}f\left(\frac{1}{\eta_0}\right)+\frac{\sqrt{\xi_0}}{4}\int\limits_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{f(\xi)}{\xi^{3/2}}\,d\xi-\frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\frac{1}{\eta_0}}\frac{F(\xi)}{\xi^{3/2}}\,d\xi.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным x и y, получим решение задачи Коши

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2}f(xy)+\frac{y}{2}f\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\sqrt{xy}}{4}\int\limits_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{f(z)\,dz}{z^{3/2}}-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int\limits_{xy}^{\frac{x}{y}}\frac{F(z)\,dz}{z^{3/2}}.$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad(x>0), \tag{35}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{y=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=F(x). \tag{36}$$

Чтобы решить эту задачу по методу Римана, приведем уравнение (35) к каноническому виду, для чего составим уравнение характеристик

$$x\,dy^2-dx^2=0.$$

Это уравнение допускает два различных интеграла

$$\frac{y}{2}+\sqrt{x}=C_1,\qquad \frac{y}{2}-\sqrt{x}=C_2,$$

и, следовательно, надо ввести новые переменные ξ и η по формулам

$$\xi=\frac{y}{2}+\sqrt{x},\quad \eta=\frac{y}{2}-\sqrt{x}\quad(x>0). \tag{37}$$

Присоединим к этим равенствам еще одну зависимость

$$w=u\sqrt{\xi-\eta}, \tag{38}$$

тогда уравнение (35) преобразуется к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{4}\frac{w}{(\xi-\eta)^2}=0. \tag{39}$$

Обратимся теперь к условиям (36) и формулам (37). Из них видно, что за кривую AB (рис. 11) в методе Римана следует взять биссектрису

$$\eta = -\xi. \tag{40}$$

Согласно тому же методу для решения поставленной задачи надо найти такое частное решение сопряженного уравнения

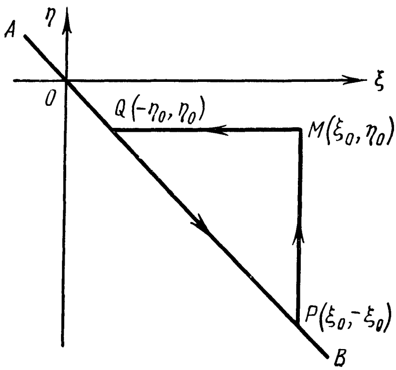

Рис. 11

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{4}\frac{v}{(\xi-\eta)^2} = 0, \tag{41}$$

которое удовлетворяло бы следующим условиям на характеристиках

$$\begin{aligned} &v(\xi_0, \eta;\ \xi_0, \eta_0) = 1 \quad (\text{на } MP) \\ &v(\xi, \eta_0;\ \xi_0, \eta_0) = 1 \quad (\text{на } MQ) \end{aligned} \tag{42}$$

Будем искать решение уравнения (41) в виде

$$v = G(\sigma), \tag{43}$$

где

$$\sigma = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}. \tag{44}$$

Тогда для $G(\sigma)$ получим следующее уравнение:

$$\sigma(1-\sigma)G''(\sigma) + (1-2\sigma)G'(\sigma) - \frac{1}{4}G(\sigma) = 0. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение есть частный случай гипергеометрического уравнения Гаусса

$$\sigma(1-\sigma)y'' + [\gamma-(1+\alpha+\beta)\sigma]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{46}$$

при

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1.$$

Уравнение Гаусса допускает частное решение в виде гипергеометрического ряда

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}\sigma + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\ \gamma(\gamma+1)}\sigma^2 + \ldots, \tag{47}$$

абсолютно сходящегося при $|\sigma| < 1$.

Отсюда ясно, что, взяв

$$v = G(\sigma) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1;\ \sigma\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sigma + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sigma^2 + \ldots, \tag{48}$$

мы удовлетворим уравнению (41) и условиям (42). Следовательно, функция

$$v = G\left(\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi_0-\eta_0)(\xi-\eta)}\right) \tag{49}$$

и есть искомая функция Римана.

Обращаясь теперь к нашей задаче нахождения решения уравнения (35) при условиях (36), возьмем формулу Римана (23) и положим в ней

$$a = b = 0, \quad f = 0.$$

Тогда мы получим

$$w(\xi_0, \eta_0)=\frac{w(P)+w(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{QP}\left(v\frac{\partial w}{\partial \xi}-w\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)d\xi-\left(v\frac{\partial w}{\partial \eta}-w\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\partial\eta,$$

где функция v определяется равенством (49), или, принимая во внимание (40),

$$w(\xi_0, \eta_0)=\frac{w(P)+w(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0}v\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0}w\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)d\xi. \tag{50}$$

Вычислим производные, входящие в формулу (50). Из формул

$$x=\frac{1}{4}(\xi-\eta)^2, \quad y=\xi+\eta$$

ясно, что

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\eta=-\xi}=\left.\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\left.-\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}.$$

Следовательно, в силу условий (36), имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\left.2\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=2F(\xi^2). \tag{51}$$

Дифференцируя (38) по ξ и η и полагая затем $\eta=-\xi$, получим

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \xi}\right|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{u}{2\sqrt{2\xi}}, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{u}{2\sqrt{2\xi}}.$$

Отсюда, в силу (51), имеем

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\left.\sqrt{2\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right|_{\eta=-\xi}=\sqrt{2\xi}F(\xi^2). \tag{52}$$

Далее из формул

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\eta=-\xi}=\left.\frac{dG}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial \xi}\right|_{\eta=-\xi}=-\frac{1}{4}\frac{(\xi+\eta_0)(\xi+\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}\left(\frac{dG}{d\sigma}\right)_{\eta=\xi},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\left.\frac{dG}{d\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=\frac{1}{4}\frac{(\xi-\eta_0)(\xi-\xi_0)}{(\xi_0-\eta_0)\xi^2}\left(\frac{dG}{d\sigma}\right)_{\eta=-\xi}$$

вытекает, что

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=-\xi}=-\frac{\xi_0+\eta_0}{2(\xi_0-\eta_0)\xi}\left(\frac{dG}{d\sigma}\right)_{\eta=-\xi}. \tag{53}$$

Чтобы воспользоваться формулой (50), надо еще вычислить значение функции w на биссектрисе $\eta=-\xi$ и в точках P и Q. Нетрудно видеть, что

$$w|_{\eta=-\xi}=w(\xi, -\xi)=\sqrt{2\xi}, \quad u(x, 0)=\sqrt{2\xi}f(\xi^2). \tag{54}$$

Отсюда также легко получаем

$$w(P)=w(\xi_0, -\xi_0)=\sqrt{2\xi_0}f(\xi_0^2), \; w(Q)=w(-\eta_0, \eta_0)=\sqrt{-2\eta_0}f(\eta_0^2). \tag{55}$$

Принимая теперь во внимание, что

$$u(x_0, y_0) = \frac{w(\xi_0, \eta_0)}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x_0}},$$

найдем из формул (50), (52)—(55)

$$u(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{\xi_0}\, f(\xi_0^2) + \sqrt{-\eta_0}\, f(\eta_0^2)}{2\sqrt[4]{x_0}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x_0}} \int\limits_{-\eta_0}^{\xi} G\left(\frac{(\xi_0 - \xi)(\xi + \eta_0)}{2\xi(\xi_0 - \eta_0)}\right) F(\xi^2)\sqrt{\xi}\, d\xi +$$

$$+ \frac{\xi_0 + \eta_0}{4(\xi_0 - \eta_0)\sqrt[4]{x_0}} \int\limits_{-\eta_0}^{\xi_0} \left(\frac{dG}{d\sigma}\right)_{\eta = -\xi} f(\xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным x и y и опустив значок у этих букв, получим решение задачи Коши для уравнения

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \frac{y}{2}}\, f\left(x + \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right) + \sqrt{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}\, f\left(x - \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{x}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \int\limits_{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}^{\sqrt{x} + \frac{y}{2}} \Phi(x, y, z)\, dz.$$

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК К ИЗУЧЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

§ 1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него образуется электромагнитное поле, которое вызывает изменения как силы тока, так и величины напряжения. Благодаря этим изменениям в проводе возникает определенный колебательный процесс, изучением которого мы и займемся.

Проведем ось Ox вдоль оси провода, а начало координат поместим в один из его концов; длину провода обозначим через l. Сила тока i и напряжение v в какой-нибудь точке провода будут функциями абсциссы x и времени t. Величины i и v связаны между собой некоторыми дифференциальными уравнениями с