Принимая теперь во внимание, что

$$u(x_0, y_0) = \frac{w(\xi_0, \eta_0)}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x_0}},$$

найдем из формул (50), (52)—(55)

$$u(x_0, y_0) = \frac{\sqrt{\xi_0}\, f(\xi_0^2) + \sqrt{-\eta_0}\, f(\eta_0^2)}{2\sqrt[4]{x_0}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi} G\left(\frac{(\xi_0 - \xi)(\xi + \eta_0)}{2\xi(\xi_0 - \eta_0)}\right) F(\xi^2)\sqrt{\xi}\, d\xi +$$

$$+ \frac{\xi_0 + \eta_0}{4(\xi_0 - \eta_0)\sqrt[4]{x_0}} \int_{-\eta_0}^{\xi_0} \left(\frac{dG}{d\sigma}\right)_{\eta = -\xi} f(\xi^2) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным x и y и опустив значок у этих букв, получим решение задачи Коши для уравнения

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \frac{y}{2}}\, f\left(x + \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right) + \sqrt{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}\, f\left(x - \sqrt{xy} + \frac{y^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{x}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \int_{\sqrt{x} - \frac{y}{2}}^{\sqrt{x} + \frac{y}{2}} \Phi(x, y, z)\, dz.$$

Глава VII

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК К ИЗУЧЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

§ 1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него образуется электромагнитное поле, которое вызывает изменения как силы тока, так и величины напряжения. Благодаря этим изменениям в проводе возникает определенный колебательный процесс, изучением которого мы и займемся.

Проведем ось Ox вдоль оси провода, а начало координат поместим в один из его концов; длину провода обозначим через l. Сила тока i и напряжение v в какой-нибудь точке провода будут функциями абсциссы x и времени t. Величины i и v связаны между собой некоторыми дифференциальными уравнениями с частными производными 1-го порядка. При выводе этих уравнений мы будем предполагать, что емкость, активное сопротивление, самоиндукция и утечка распределены вдоль провода непрерывно и равномерно, и что постоянные C, R, L и G, их характеризующие, рассчитаны на единицу длины провода.

Рассмотрим часть провода, заключенную между двумя сечениями $x=x_1$ и $x=x_2$. Применяя закон Ома к этой части провода, будем иметь

$$v(x_1,\ t)-v(x_2,\ t)=R\int_{x_1}^{x_2} i(x,\ t)\,dx+L\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial i(x,\ t)}{\partial t}\,dx. \tag{1}$$

Так как, с другой стороны,

$$v(x_1,\ t)-v(x_2,\ t)=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial x}\,dx,$$

то имеет место равенство

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri\right)dx=0,$$

из которого, в силу произвольности x_1 и x_2, следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0. \tag{2}$$

Количество электричества, протекающего через рассматриваемый участок $(x_1,\ x_2)$ провода за единицу времени

$$i(x_1,\ t)-i(x_2,\ t)=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial i}{\partial x}\,dx,$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки этого участка провода, и количества электричества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial v}{\partial t}\,dx+G\int_{x_1}^{x_2}v\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Gv\right)dx=0,$$

откуда

$$\frac{\partial i}{\partial x}+C\frac{\partial v}{\partial t}+Gv=0. \tag{3}$$