§ 2. Телеграфное уравнение

Если мы продифференцируем выведенное в предыдущем параграфе уравнение (2) по x, а уравнение (3) по t и затем из найденных выражений исключим производную $\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t}$, то получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv. \tag{4}$$

Аналогично выводится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \tag{5}$$

которому удовлетворяет сила тока i. Таким образом, получим, что напряжение v и сила тока i удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w, \tag{6}$$

где

$$a_0 = LC, \quad 2b_0 = RC + GL, \quad c_0 = GR. \tag{7}$$

Это уравнение называют *телеграфным уравнением*.

Если ввести новую функцию $u(x, t)$, положив

$$w = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}u, \tag{8}$$

то уравнение (6) примет более простую форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u, \tag{9}$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \qquad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0} \tag{10}$$

§ 3. Интегрирование телеграфного уравнения по методу Римана

Применим метод Римана к нахождению решения уравнения (9), удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{11}$$

Прежде всего преобразуем это уравнение к каноническому виду, введя новые независимые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \frac{b}{a}(x + at), \quad \eta = \frac{b}{a}(x - at). \tag{12}$$