§ 2. Телеграфное уравнение

Если мы продифференцируем выведенное в предыдущем параграфе уравнение (2) по x, а уравнение (3) по t и затем из найденных выражений исключим производную $\frac{\partial^2 i}{\partial x\,\partial t}$, то получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + GRv. \tag{4}$$

Аналогично выводится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \tag{5}$$

которому удовлетворяет сила тока i. Таким образом, получим, что напряжение v и сила тока i удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w, \tag{6}$$

где

$$a_0 = LC, \quad 2b_0 = RC + GL, \quad c_0 = GR. \tag{7}$$

Это уравнение называют *телеграфным уравнением.*

Если ввести новую функцию $u(x, t)$, положив

$$w = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}u, \tag{8}$$

то уравнение (6) примет более простую форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u, \tag{9}$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \qquad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}}{a_0}. \tag{10}$$

§ 3. Интегрирование телеграфного уравнения по методу Римана

Применим метод Римана к нахождению решения уравнения (9), удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{11}$$

Прежде всего преобразуем это уравнение к каноническому виду, введя новые независимые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \frac{b}{a}(x + at), \quad \eta = \frac{b}{a}(x - at). \tag{12}$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4}u=0. \tag{13}$$

Прямая $t=0$ в новых переменных будет биссектрисой (рис. 12):

$$\xi=\eta. \tag{14}$$

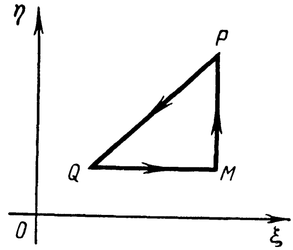

Рис. 12

Далее, из формул (12) вытекает, что

$$x=\frac{a}{b}\frac{\xi+\eta}{2}, \qquad t=\frac{1}{b}\frac{\xi-\eta}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1}{b}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$

или, в силу начальных условий (11), имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\eta=\xi}=\left.\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{b}F(x)=\frac{1}{b}F\left(\frac{a}{b}\xi\right), \tag{15}$$

а также

$$u|_{\eta=\xi}=f\left(\frac{a}{b}\xi\right). \tag{16}$$

Полагая в формуле Римана (23) (гл. VI) $a=0$, $b=0$, $f=0$ и приняв во внимание (14), получим

$$u(\xi_0\quad\eta_0)=\frac{(uv)P+(uv)Q}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{QP}v\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{QP}u\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\xi. \tag{17}$$

Найдем теперь функцию Римана $v(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)$. Она должна удовлетворять сопряженному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{4}v=0 \tag{18}$$

и обращаться на характеристиках MP и MQ в единицу.

Будем искать решение уравнения (18) в виде

$$v=G\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right).$$

Подставив это выражение в уравнение (18) и обозначив через λ корень $\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}$, найдем, что функция v удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$G''(\lambda)+\frac{1}{\lambda}G'(\lambda)+G(\lambda)=0, \tag{19}$$

частным решением которого является *функция Бесселя нулевого порядка:*

$$J_0(\lambda)=1-\frac{\lambda^2}{2^2}+\frac{\lambda^4}{(2\cdot 4)^2}-\frac{\lambda^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2}+\ldots \tag{20}$$

Отсюда ясно, что, взяв

$$v = J_0(\lambda),$$

получим решение уравнения (18), которое обращается на характеристиках $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$ в единицу, так как здесь $\lambda = 0$.

Таким образом, функция Римана найдена, она имеет следующий вид:

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}\right). \tag{21}$$

Отсюда легко получим:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \xi}\right|_{\eta=\xi} = \left.\frac{dJ_0}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right|_{\eta=\xi} = \frac{1}{2}\frac{\xi-\eta_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}\left.J_0'(\lambda)\right|_{\eta=\xi},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=\xi} = \left.\frac{dJ_0}{d\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right|_{\eta=\xi} = \frac{1}{2}\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}\left.J_0'(\lambda)\right|_{\eta=\xi}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right|_{\eta=\xi} = \frac{\xi_0-\eta_0}{2\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}\left.J_0'(\lambda)\right|_{\eta=\xi}. \tag{22}$$

Подставив теперь (15), (16) и (22) в формулу (17) и приняв во внимание, что

$$u(P) = f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right), \quad u(Q) = f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right),$$

получим

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{f\left(\frac{a}{b}\xi_0\right) + f\left(\frac{a}{b}\eta_0\right)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2b}\int_{\eta_0}^{\xi_0} J_0\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right) F\left(\frac{a}{b}\xi\right) d\xi -$$

$$- \frac{\xi_0-\eta_0}{4}\int_{\eta_0}^{\xi_0} f\left(\frac{a}{b}\xi\right)\frac{J_0'\left(\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}\right)}{\sqrt{(\xi-\xi_0)(\xi-\eta_0)}}\, d\xi.$$

Возвращаясь теперь к старым переменным x и t (значки 0 опущены) и вводя новую переменную интегрирования $z = \frac{a}{b}\xi$, получим

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at} \Phi(x, t, z)\, dz, \tag{23}$$

где

$$\Phi(x, t, z) = \frac{1}{a}F(z) J_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}\right) +$$

$$+ btf(z)\frac{J_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}}. \tag{24}$$