§ 4. Электрические колебания в бесконечном проводе

Допустим, что мы имеем дело с настолько длинным проводом, что его можно считать простирающимся в обе стороны до бесконечности. В этом случае обе функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в начальные условия (11), должны быть известны во всем интервале $(-\infty, \infty)$ и тогда формула (23) даст возможность вычислить значение функции $u(x, t)$ во всякой точке провода в любой момент времени. Зная $u(x, t)$, мы можем вычислить и величину напряжения $v(x, t)$, так как

$$v(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t) \left(\mu = \frac{b_0}{a_0}\right). \tag{25}$$

Исследуем ближе физический смысл формулы (25). С этой целью положим для упрощения $a_0 = b_0 = 1$ и допустим, что в начальный момент времени электрические возмущения распространяются только на участке $(0, \alpha)$ провода. Следовательно, функции $f(x)$ и $F(x)$ будут равны нулю вне этого интервала.

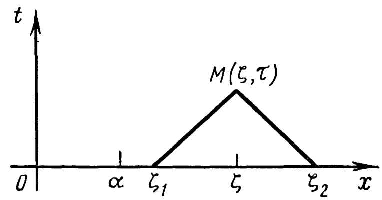

Рис. 13

Возьмем на проводе какую-нибудь точку с абсциссой $x = \zeta > \alpha$ и будем наблюдать ее в течение некоторого времени (рис. 13). Эта точка в момент времени τ будет занимать положение $M(\zeta, \tau)$. Проведем через точку M характеристики

$$x - t = \zeta - \tau, \quad x + t = \zeta + \tau,$$

которые пересекут ось Ox в точках с абсциссами $\zeta_1 = \zeta - \tau$ и $\zeta_2 = \zeta + \tau$. Возьмем промежуток времени от $t = 0$ до момента $t = \tau$, где

$$\tau < \zeta - \alpha; \tag{26}$$

за это время точка $(\zeta, 0)$ переместится в положение $M(\zeta, \tau)$, а характеристика $x - t = \zeta - \tau$ пересечет ось Ox в точке ζ_1, лежащей направо от точки α, т. е. вне участка начальных колебаний, что очевидно из неравенства (26). Нетрудно видеть, что за истекшее время электрические колебания еще не достигли наблюдаемой точки. В самом деле, промежуток интегрирования $(\zeta - \tau, \zeta + \tau)$ в формуле (23) не содержит интервала $(0, \alpha)$, как это прямо видно из рис. 13. Вспоминая, что функции $f(x)$ и $F(x)$ равны нулю вне интервала $(0, \alpha)$, мы убеждаемся, что не только функции $f(\zeta - \tau)$ и $f(\zeta + \tau)$, но и функция $\Phi(\zeta, \tau, z)$ равна нулю в промежутке $(\zeta - \tau, \zeta + \tau)$. Отсюда ясно, на основании формулы (23), что $u = 0$ $(0 < \tau < \zeta - \alpha)$. Следовательно, в течение рассматриваемого промежутка времени $(0, \zeta - \alpha)$ величина $v = 0$, что и подтверждает высказанное выше положение.

Возьмем теперь промежуток времени от $\tau = \zeta - \alpha$ до $\tau = \zeta$. В этом случае $0 < \zeta - \tau < \alpha$ и, следовательно, характеристика $x - t = \zeta - \tau$ пересечет ось Ox в точке ζ_1, лежащей между 0 и α (рис. 14). Из этого чертежа видим, что промежуток интегрирования $(\zeta - \tau,\ \zeta + \tau)$ может быть разбит на два:

$$(\zeta - \tau,\ \alpha) \text{ и } (\alpha,\ \zeta + \tau).$$

Во втором из этих интервалов функция $\Phi(\zeta,\ \tau,\ z)$ равна нулю, и, следовательно, формула (23) даст следующее равенство:

$$u = \frac{f(\zeta - \tau)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{\zeta-\tau}^{\alpha} \Phi(\zeta,\ \tau,\ z)\,dz \qquad (\zeta - \alpha < \tau < \zeta), \tag{27}$$

которое показывает, что за взятый нами промежуток времени к наблюдаемой точке подходят электрические колебания, и напря-

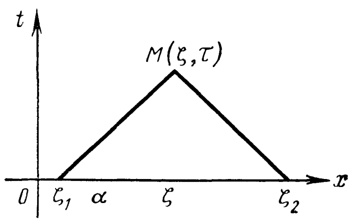

Рис. 14

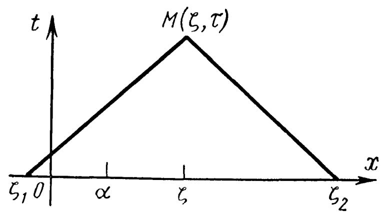

Рис. 15

жение v в этой точке может быть вычислено по формуле

$$v = e^{-\mu\tau} u,$$

где u определяется равенством (27).

Посмотрим теперь, что будет происходить в наблюдаемой точке с момента времени τ, большего чем ζ.

Так как в этом случае

$$\zeta - \tau < 0,$$

то характеристика $x - t = \zeta - \tau$ пересечет ось Ox в точке ζ_1, лежащей налево от точки 0, т. е. вне участка начальных колебаний. Но нетрудно показать, что напряжение v в наблюдаемой точке уже не будет равно нулю, как это имело место для момента времени $\tau < \zeta - \alpha$. Действительно, из рис. 15 видно, что промежуток $(0,\ \alpha)$ целиком заключается в интервале $(\zeta - \tau,\ \zeta + \tau)$, вследствие чего формула (23) даст

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\alpha} \Phi(\zeta,\ \tau,\ z)\,dz \qquad (\zeta < \tau),$$

откуда

$$v=\frac{e^{-\mu\tau}}{2}\int\limits_{0}^{\alpha}\Phi(\zeta,\ \tau,\ z)\,dz. \qquad (28)$$

Последняя формула показывает, что электрические колебания, прошедшие за время τ $(\zeta-\alpha<\tau<\zeta)$ через точку ζ, оставили после себя *остаточное возмущение*, выражаемое формулой (28). Действительно, наличие такого остаточного действия в проводе было подтверждено опытами Физо.

В заключение заметим, что интеграл, входящий в формулу (28), при возрастании τ до $+\infty$ имеет конечную величину. Отсюда следует, что если в начальный момент времени электрические возмущения охватывают лишь конечный участок бесконечного провода и внешних возмущений нет, то напряжение v в бесконечном проводе с течением времени убывает до нуля.

§ 5. Колебания в линии, свободной от искажения

Это название было дано Хевисайдом таким линиям, у которых постоянные G, C, L и R связаны соотношением

$$\frac{G}{C}=\frac{R}{L}\,. \qquad (29)$$

Для подобного рода линий телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2 u$$

принимает форму волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(a=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right), \qquad (30)$$

так как в этом случае $b=0$.

Вспоминая общее решение уравнения (30), найдем, на основании соотношения

$$v=e^{-\frac{R}{L}t}\,u,$$

что величина напряжения в рассматриваемой линии определяется формулой

$$v=e^{-\frac{R}{L}t}\,[\varphi(x-at)+\psi(x+at)], \qquad (31)$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Для нахождения силы тока возьмем уравнение

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=Gv+C\,\frac{\partial v}{\partial t}$$