откуда

$$v=\frac{e^{-\mu\tau}}{2}\int_{0}^{\alpha}\Phi(\zeta,\ \tau,\ z)\,dz. \tag{28}$$

Последняя формула показывает, что электрические колебания, прошедшие за время τ ($\zeta-\alpha<\tau<\zeta$) через точку ζ, оставили после себя *остаточное возмущение*, выражаемое формулой (28). Действительно, наличие такого остаточного действия в проводе было подтверждено опытами Физо.

В заключение заметим, что интеграл, входящий в формулу (28), при возрастании τ до $+\infty$ имеет конечную величину. Отсюда следует, что если в начальный момент времени электрические возмущения охватывают лишь конечный участок бесконечного провода и внешних возмущений нет, то напряжение v в бесконечном проводе с течением времени убывает до нуля.

§ 5. Колебания в линии, свободной от искажения

Это название было дано Хевисайдом таким линиям, у которых постоянные G, C, L и R связаны соотношением

$$\frac{G}{C}=\frac{R}{L}\,. \tag{29}$$

Для подобного рода линий телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2 u$$

принимает форму волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\left(a=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right), \tag{30}$$

так как в этом случае $b=0$.

Вспоминая общее решение уравнения (30), найдем, на основании соотношения

$$v=e^{-\frac{R}{L}t}\,u,$$

что величина напряжения в рассматриваемой линии определяется формулой

$$v=e^{-\frac{R}{L}t}\,[\varphi(x-at)+\psi(x+at)], \tag{31}$$

где φ и ψ — произвольные функции.

Для нахождения силы тока возьмем уравнение

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=Gv+C\,\frac{\partial v}{\partial t}$$

и внесем в его правую часть выражения для v и $\frac{\partial v}{\partial t}$, взятые из формулы (31); тогда получим

$$\frac{\partial i}{\partial x}=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,[\varphi'(x-at)-\psi'(x+at)].$$

Интегрируя это выражение по x, найдем, что

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,[\varphi(x-at)-\psi(x+at)+\varkappa(t)], \tag{32}$$

где $\varkappa(t)$ — произвольная функция. Подставив теперь (31) и (32) в уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial x}+L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri=0,$$

найдем, что

$$\varkappa'(t)=0,$$

откуда

$$\varkappa(t)=K=\text{const}.$$

Постоянную K, не нарушая общности, можно считать равной нулю. В самом деле, допустим, что $K\neq 0$; тогда, заменив в формулах (31) и (32) функции $\varphi(x-at)$ и $\psi(x+at)$ функциями $\varphi(x-at)-\frac{K}{2}$ и $\psi(x+at)+\frac{K}{2}$, убедимся, что постоянной K в этих формулах уже не будет.

Итак,

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\frac{R}{L}t}\,[\varphi(x-at)-\psi(x+at)]. \tag{33}$$

Формулы (31) и (33) показывают, что процесс распространения электрических возмущений в линии без искажения имеет волновой характер. Скорость распространения этих волн определяется

$$a=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{34}$$

Множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$, стоящий в правых частях формул (31) и (33), показывает, что колебательный процесс, возникающий в проводе при прохождении по нему электрического тока, с течением времени затухает.

Что касается функций φ и ψ, от которых зависит форма волн, то они определяются из начальных условий

$$v|_{t=0}=f(x),\quad i|_{t=0}=\sqrt{\frac{C}{L}}\,F(x), \tag{35}$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — заданные функции.

Действительно, полагая в формулах (31) и (33) $t=0$, найдем, на основании условий (35), что

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \quad \varphi(x)-\psi(x)=F(x),$$

откуда

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+F(x)}{2}, \quad \psi(x)=\frac{f(x)-F(x)}{2}. \tag{36}$$

Если провод настолько длинен, что его можно считать простирающимся в обе стороны до бесконечности, то функции $f(x)$ и $F(x)$ должны быть известны на всем интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда по формулам (31), (33) и (36) можно определить силу тока и напряжение во всякой точке цепи в любой момент времени.

§ 6. Граничные условия для провода конечной длины

Если провод имеет конечную длину l, то здесь встретится то же самое обстоятельство, какое имело место при колебании конечной струны, а именно, функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в выражение начальных условий, известны лишь в интервале $(0, l)$, между тем как применение формул (31) и (33) требует знания этих функций для любого значения их аргументов. Отсюда вытекает необходимость найти законы продолжения функций $f(x)$ и $F(x)$ за пределы интервала $(0, l)$. Способы такого продолжения могут быть найдены из граничных условий, которые должны выполняться в начале и в конце провода.

Приведем несколько примеров наиболее часто встречающихся граничных условий.

1) В начале линии включена батарея с постоянной электродвижущей силой E; конец линии заземлен.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E, \quad v|_{x=l}=0.$$

2) Начало линии находится под синусоидальным напряжением с частотой ω; конец провода изолирован.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E\sin\omega t, \quad i|_{x=l}=0$$

3) В начале и в конце линии включены приемники с омическим сопротивлением R_0 и R_l и с самоиндукцией L_0 и L_l.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E-R_0 i_0-L_0\frac{di_0}{dt}, \quad v|_{x=l}=R_l i_l+L_l\frac{di_l}{dt},$$

где E — электродвижущая сила батареи, i_0 и i_l — сила тока в начале и в конце провода.