Действительно, полагая в формулах (31) и (33) $t=0$, найдем, на основании условий (35), что

$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \quad \varphi(x)-\psi(x)=F(x),$$

откуда

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+F(x)}{2}, \quad \psi(x)=\frac{f(x)-F(x)}{2}. \tag{36}$$

Если провод настолько длинен, что его можно считать простирающимся в обе стороны до бесконечности, то функции $f(x)$ и $F(x)$ должны быть известны на всем интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда по формулам (31), (33) и (36) можно определить силу тока и напряжение во всякой точке цепи в любой момент времени.

§ 6. Граничные условия для провода конечной длины

Если провод имеет конечную длину l, то здесь встретится то же самое обстоятельство, какое имело место при колебании конечной струны, а именно, функции $f(x)$ и $F(x)$, входящие в выражение начальных условий, известны лишь в интервале $(0, l)$, между тем как применение формул (31) и (33) требует знания этих функций для любого значения их аргументов. Отсюда вытекает необходимость найти законы продолжения функций $f(x)$ и $F(x)$ за пределы интервала $(0, l)$. Способы такого продолжения могут быть найдены из граничных условий, которые должны выполняться в начале и в конце провода.

Приведем несколько примеров наиболее часто встречающихся граничных условий.

1) В начале линии включена батарея с постоянной электродвижущей силой E; конец линии заземлен.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E, \quad v|_{x=l}=0.$$

2) Начало линии находится под синусоидальным напряжением с частотой ω; конец провода изолирован.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E\sin\omega t, \quad i|_{x=l}=0$$

3) В начале и в конце линии включены приемники с омическим сопротивлением R_0 и R_l и с самоиндукцией L_0 и L_l.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E-R_0 i_0-L_0\frac{di_0}{dt}, \quad v|_{x=l}=R_l i_l+L_l\frac{di_l}{dt},$$

где E — электродвижущая сила батареи, i_0 и i_l — сила тока в начале и в конце провода.

4) В начале и в конце провода включены разделительные конденсаторы емкостью C_0 и C_l.

Граничные условия:

$$v|_{x=0}=E-\frac{1}{C_0}\int i_0\,dt, \quad i|_{x=l}=C_l\frac{dv_l}{dt},$$

где v_l — напряжение на конце провода.

Глава VIII

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Формула Пуассона

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y, z). \tag{2}$$

Будем предполагать, что $\varphi_0(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\varphi_1(x, y, z)$ — до второго порядка включительно во всем пространстве.

Покажем сначала, что интеграл

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\sigma_r, \tag{3}$$

взятый по поверхности сферы S_{at} радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x, y, z)$, является решением волнового уравнения (1); здесь $\varphi(\xi, \eta, \xi)$ — произвольная функция.

Заметим, что координаты точек сферы S_{at} могут быть выражены по формулам:

$$\xi=x+\alpha at, \quad \eta=y+\beta at, \quad \zeta=z+\gamma at,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы радиусов сферы S_{at}.

Мы их можем записать в виде:

$$\alpha=\sin\theta\cos\psi, \ \beta=\sin\theta\sin\psi, \quad \gamma=\cos\theta,$$

где угол θ меняется от 0 до π и угол ψ от 0 до 2π. Когда точка (ξ, η, ζ) описывает сферу S_{at}, точка (α, β, γ) описывает сферу S_1 радиуса, равного единице, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади $d\sigma_r$ и $d\sigma_1$ обеих сфер