4) В начале и в конце провода включены разделительные конденсаторы емкостью C_0 и C_l.

Граничные условия:

$$v\,|_{x=0}=E-\frac{1}{C_0}\int i_0\,dt,\quad i\,|_{x=l}=C_l\frac{dv_l}{dt},$$

где v_l — напряжение на конце провода.

Глава VIII

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Формула Пуассона

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\,|_{t=0}=\varphi_0(x,\ y,\ z),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x,\ y,\ z). \tag{2}$$

Будем предполагать, что $\varphi_0(x,\ y,\ z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\varphi_1(x,\ y,\ z)$ — до второго порядка включительно во всем пространстве.

Покажем сначала, что интеграл

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{r}\,d\sigma_r, \tag{3}$$

взятый по поверхности сферы S_{at} радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x,\ y,\ z)$, является решением волнового уравнения (1); здесь $\varphi(\xi,\ \eta,\ \xi)$ — произвольная функция.

Заметим, что координаты точек сферы S_{at} могут быть выражены по формулам:

$$\xi=x+\alpha at,\quad \eta=y+\beta at,\quad \zeta=z+\gamma at,$$

где α, β, γ — направляющие косинусы радиусов сферы S_{at}.

Мы их можем записать в виде:

$$\alpha=\sin\theta\cos\psi,\ \beta=\sin\theta\sin\psi,\quad \gamma=\cos\theta,$$

где угол θ меняется от 0 до π и угол ψ от 0 до 2π. Когда точка $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ описывает сферу S_{at}, точка $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ описывает сферу S_1 радиуса, равного единице, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади $d\sigma_r$ и $d\sigma_1$ обеих сфер имеется соотношение

$$d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 d\sigma_1 = a^2 t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Тогда интеграл (3) приводится к виду

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at)\, d\sigma_1. \tag{4}$$

Отсюда легко заметить, что функция $u(x, y, z, t)$ имеет непрерывные производные до k-го порядка, если функция $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе со своими производными до k-го порядка.

Из формулы (4) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{t}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_1$$

или, возвращаясь к первоначальной области интегрирования

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{S_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\sigma_r. \tag{5}$$

Дифференцируя теперь выражение (4) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at)\, d\sigma_1 +$$
$$+ \frac{at}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\sigma_1. \tag{6}$$

Чтобы вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, перепишем (6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iint_{S_{at}} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\sigma_r$$

и, применив формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{1}{4\pi at} \iiint_{D_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где D_{at} — шар радиуса $r = at$ с центром в точке $M(x, y, z)$. Полагая

$$I = \iiint_{D_{at}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at}.$$

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \tag{8}$$

В самом деле, переходя в интеграле I к сферическим координатам (ρ, θ, ψ) с центром в точке $M(x, y, z)$, имеем

$$I=\int\limits_0^{at}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,d\rho.$$

Дифференцируя по t, получим

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)_{\rho=at}a^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi=$$

$$=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r.$$

Сравнивая равенства (5), (7) и (8), мы видим, что функция $u(x, y, z, t)$, определяемая формулой (3), удовлетворяет волновому уравнению (1), какова бы ни была функция $\varphi(x, y, z)$, имеющая непрерывные производные до второго порядка. Из формул (4) и (6) непосредственно следует, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x, y, z). \tag{9}$$

Если u есть решение волнового уравнения (1) с начальными данными (9), то легко видеть, что функция

$$v(x, y, z, t)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

будет также решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям

$$v|_{t=0}=\varphi(x, y, z),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=a^2\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right|_{t=0}=0. \tag{10}$$

Взяв теперь в случае начальных условий (9) за $\varphi(x, y, z)$ функцию $\varphi_1(x, y, z)$, а в случае начальных условий (10) — функцию $\varphi_0(x, y, z)$ и сложив построенные таким образом решения, получим решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Таким образом, решение волнового уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), запишется в виде

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\sigma_r+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r}d\sigma_r. \tag{11}$$

Эта формула называется *формулой Пуассона.*

Чтобы яснее представить физическую картину распространения волн в трехмерном пространстве, описываемую формулой Пуассона (11), положим, что начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области Ω с границей S, т. е. что функции φ_0 и φ_1 равны нулю вне области Ω. Пусть точка $M(x, y, z)$ находится вне области Ω. Обозначим через d и D соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от M до точек поверхности S (рис. 16). При $t < \frac{d}{a}$ сфера S_{at} находится вне Ω, обе функции φ_0 и φ_1 равны нулю на сфере S_{at} и из формулы (11) имеем $u(M, t) = 0$, т. е. начальные возмущения еще не успели дойти до точки M. В момент $t = \frac{d}{a}$ сфера S_{at} коснется поверхности S и передний фронт волны пройдет через точку M. Начиная с момента времени $t = \frac{d}{a}$ до момента времени $t = \frac{D}{a}$, сфера S_{at} будет пересекать область Ω и формула (11) даст $u(M, t) \neq 0$. Наконец, при $t > \frac{D}{a}$ сфера S_{at} не будет иметь общих точек с поверхностью S (вся область Ω будет лежать внутри сферы S_{at}) и из формулы (11) будем иметь $u(M, t) = 0$, т. е. начальные возмущения уже прошли через точку M. Моменту $t = \frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M. *Передний фронт волны* в заданный момент времени t представляет собой поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от S, равное at. Передний фронт волны есть огибающая для семейства сфер, имеющих центры на поверхности S и радиус at. *Задний фронт волны* в заданный момент t представляет собой поверхность, отделяющую точки, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Постоянная a является скоростью распространения фронта волны.

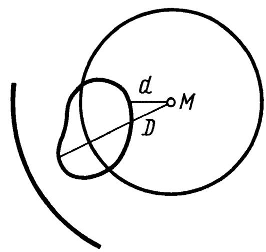

Рис. 16

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M пространства действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтами волн (принцип Гюйгенса).

§ 2. Цилиндрические волны

Рассмотрим частный случай, когда функции φ_0 и φ_1 зависят только от x и y, т. е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси Oz. Если передвигать точку $M(x, y, z)$