Чтобы яснее представить физическую картину распространения волн в трехмерном пространстве, описываемую формулой Пуассона (11), положим, что начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области Ω с границей S, т. е. что функции φ_0 и φ_1 равны нулю вне области Ω. Пусть точка $M(x, y, z)$ находится вне области Ω. Обозначим через d и D соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от M до точек поверхности S (рис. 16). При $t < \frac{d}{a}$ сфера S_{at} находится вне Ω, обе функции φ_0 и φ_1 равны нулю на сфере S_{at} и из формулы (11) имеем $u(M, t) = 0$, т. е. начальные возмущения еще не успели дойти до точки M. В момент $t = \frac{d}{a}$ сфера S_{at} коснется поверхности S и передний фронт волны пройдет через точку M. Начиная с момента времени $t = \frac{d}{a}$ до момента времени $t = \frac{D}{a}$, сфера S_{at} будет пересекать область Ω и формула (11) даст $u(M, t) \neq 0$. Наконец, при $t > \frac{D}{a}$ сфера S_{at} не будет иметь общих точек с поверхностью S (вся область Ω будет лежать внутри сферы S_{at}) и из формулы (11) будем иметь $u(M, t) = 0$, т. е. начальные возмущения уже прошли через точку M. Моменту $t = \frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M. *Передний фронт волны* в заданный момент времени t представляет собой поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от S, равное at. Передний фронт волны есть огибающая для семейства сфер, имеющих центры на поверхности S и радиус at. *Задний фронт волны* в заданный момент t представляет собой поверхность, отделяющую точки, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Постоянная a является скоростью распространения фронта волны.

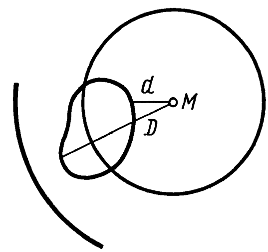

Рис. 16

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M пространства действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтами волн (принцип Гюйгенса).

§ 2. Цилиндрические волны

Рассмотрим частный случай, когда функции φ_0 и φ_1 зависят только от x и y, т. е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси Oz. Если передвигать точку $M(x, y, z)$

параллельно оси Oz, то, очевидно, правая часть формулы Пуассона (11) не будет менять своего значения, т. е. функция u также не будет зависеть от z и формула (11) даст решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{12}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \tag{13}$$

Мы можем рассматривать решение (11), оставаясь исключительно на плоскости xOy. Для этого надо интегралы формулы (11), которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости xOy. Возьмем точку $M(x, y)$ на плоскости xOy. Точки с координатами (ξ, η, ζ), определяемые по формулам:

$$\xi = x + \alpha a t, \quad \eta = y + \beta a t, \quad \zeta = z + \gamma a t$$

при $z = 0$, суть переменные точки сферы S_{at} с центром $M(x, y, 0)$ и радиусом at. Части этой сферы, находящиеся над и под плоскостью xOy, проектируются на плоскость xOy в виде круга C_{at} с центром $M(x, y)$ и радиусом at. Известно, что

$$dC_{at} = \cos(nz)\, d\sigma_{at},$$

где n — направление нормали к S_{at}, т. е. радиуса этой сферы, образующей острый угол с осью Oz. Если N — переменная точка сферы, N_1 — ее проекция на плоскость xOy, то

$$\cos(nz) = \frac{|NN_1|}{|MN|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at},$$

где (ξ, η) — координаты переменной точки круга C_{at}.

В результате преобразования формулы (11) получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \tag{14}$$

Эта формула дает решение волнового уравнения (12), удовлетворяющее начальным данным (13).

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью B на плоскости xOy с контуром l, т. е. $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю вне B. Пусть точка $M(x, y)$ лежит вне области B. Для моментов времени $t < \frac{d}{a}$, где d — наименьшее расстояние от M до контура l, круг C_{at} не имеет общих точек с областью B, функции $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю во всем круге C_{at} и формула (14) дает $u(x, y, t) = 0$ — до точки M возмущение еще не дошло. В момент $t=\frac{d}{a}$ в точку M придет передний фронт волны. Для значений $t>\frac{D}{a}$, где D — наибольшее расстояние от M до контура l, круг C_{at} будет содержать внутри себя всю область B и мы получим

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{B}\frac{\varphi_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{B}\frac{\varphi_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}. \qquad (15)$$

В данном случае после момента времени $t=\frac{D}{a}$ функция $u(x, y, t)$ не обращается в нуль, как в случае трехмерного пространства. Но ввиду присутствия члена a^2t^2 в знаменателе можно утверждать, что $u(x, y, t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, начальное возмущение, локализованное на плоскости, не локализовано во времени. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт волны, но не имеет заднего фронта (принцип Гюйгенса не имеет места). В трехмерном пространстве уравнению (12) соответствуют так называемые *цилиндрические волны*.

§ 3. Непрерывная зависимость решения от начальных данных

Все выведенные формулы, дающие решение задачи Коши для волнового уравнения, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определенные функции, и производные по времени от таких интегралов. Поэтому если изменить начальные функции φ_0 и φ_1 так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и функция u, дающая решение задачи Коши, т. е. решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения t, если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

§ 4. Теорема единственности

Докажем единственность решения волнового уравнения при заданных начальных условиях. Для простоты записи будем считать $a=1$, чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении t на $\frac{t}{a}$. Для большей наглядности рассмотрим случай трех независимых переменных, т. е. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (16)$$