щение еще не дошло. В момент $t=\frac{d}{a}$ в точку $M$ придет передний фронт волны. Для значений $t>\frac{D}{a}$, где $D$ — наибольшее расстояние от $M$ до контура $l$, круг $C_{at}$ будет содержать внутри себя всю область $B$ и мы получим

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{B}\frac{\varphi_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{B}\frac{\varphi_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}. \qquad (15)$$

В данном случае после момента времени $t=\frac{D}{a}$ функция $u(x, y, t)$ не обращается в нуль, как в случае трехмерного пространства. Но ввиду присутствия члена $a^2t^2$ в знаменателе можно утверждать, что $u(x, y, t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, начальное возмущение, локализованное на плоскости, не локализовано во времени. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт волны, но не имеет заднего фронта (принцип Гюйгенса не имеет места). В трехмерном пространстве уравнению (12) соответствуют так называемые *цилиндрические волны*.

## § 3. Непрерывная зависимость решения от начальных данных

Все выведенные формулы, дающие решение задачи Коши для волнового уравнения, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определенные функции, и производные по времени от таких интегралов. Поэтому если изменить начальные функции $\varphi_0$ и $\varphi_1$ так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и функция $u$, дающая решение задачи Коши, т. е. решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения $t$, если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

## § 4. Теорема единственности

Докажем единственность решения волнового уравнения при заданных начальных условиях. Для простоты записи будем считать $a=1$, чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении $t$ на $\frac{t}{a}$. Для большей наглядности рассмотрим случай трех независимых переменных, т. е. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (16)$$

с начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=f(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x, y). \tag{17}$$

Докажем единственность решения задачи Коши (16)—(17), предполагая, что решение $u(x, y, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.

Пусть $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$ суть два решения уравнения (16), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям (17). Тогда разность

$$u(x, y\ \ t)=u_1(x, y, t)-u_2(x, y, t)$$

будет удовлетворять волновому уравнению (16) и нулевым начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=0. \tag{18}$$

Теорема единственности будет доказана, если мы докажем, что $u\equiv 0$ при любых $(x, y)$ и при любом $t>0$.

Рассмотрим трехмерное пространство $(x, y, t)$ и возьмем в нем произвольную точку $N(x_0, y_0, t_0)$, причем $t_0>0$. Из этой точки, как вершины, проведем конус

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-(t-t_0)^2=0$$

до его пересечения с плоскостью $t=0$. Проведем еще плоскость $t=t_1$, где $0<t_1<t_0$, и пусть $D$ — область, ограниченная боковой поверхностью $\Gamma$ конуса и частями плоскостей $t=0$ и $t=t_1$, находящихся внутри конуса ($D$ — усеченный круговой конус). Обозначим через $\sigma_0$ и $\sigma_1$ — соответственно нижнее и верхнее основания усеченного конуса.

Нетрудно проверить следующее тождество:

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-$$
$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Проинтегрируем это тождество по области $D$. Интеграл от левой части равен нулю, так как $u$ является решением уравнения (16). Интеграл в правой части преобразуем в интеграл по поверхности области $D$, пользуясь формулой Остроградского. Тогда получим

$$\iint\limits_{\Gamma}\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(nt)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right\}ds+\iint\limits_{\sigma_0}\{\ldots\}ds+\iint\limits_{\sigma_1}\{\ldots\}ds=0. \tag{19}$$

На нижнем основании $\sigma_0$ усеченного конуса $D$, в силу начальных условий (18), функция $u$ и все ее частные производные первого порядка равны нулю и, следовательно, второй интеграл в (19) равен нулю. На верхнем основании $\sigma_1$ имеем

$$\cos(nx) = \cos(ny) = 0, \quad \cos(nt) = 1.$$

На боковой поверхности $\Gamma$ конуса направляющие косинусы нормали удовлетворяют соотношению

$$\cos^2(nt) - \cos^2(nx) - \cos^2(ny) = 0.$$

Теперь равенство (19) можно переписать в виде

$$\iint_{\Gamma} \frac{1}{\cos(nt)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(nx) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(ny) \right]^2 \right\} ds +$$
$$+ \iint_{\sigma_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] ds = 0.$$

На боковой поверхности $\Gamma$ $\cos(nt) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, первый интеграл неотрицателен, а потому

$$\iint_{\sigma_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] ds = 0.$$

Отсюда следует, что во всех точках внутри полного конуса с вершиной $N(x_0, y_0, t_0)$ частные производные первого порядка функции $u$ равны нулю и, следовательно, сама функция $u = \text{const}$. На нижнем основании конуса она равна нулю в силу (18), а следовательно, $u = 0$ в точке $N(x_0, y_0, t_0)$.

## § 5. Неоднородное волновое уравнение

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, t) \tag{20}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

Для решения этой задачи рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \tag{22}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = g(x, y, z, \tau), \tag{23}$$